|  |
| --- |
| **מתמטיקה בדידה – אביב 2013** |
| סיכומי שיעור |
|  |
| סיכומי השיעור במתמטיקה בדידה מקורס מוגבר של אילון בן שמואל – אביב 2013 |
|  |
| **דורון ים** |
| **6/20/2013** |
|  |

**שיעור 1 – 8.3.13**

**פסוק: אמירה שניתן לטעון עליה אם היא אמת או שקר.**

הביטוי  *אינו פסוק, אלא שם עצם. הביטוי "מכבי, תתחילו לרוץ על המגרש" אינו פסוק, אלא ציווי כלשהו.*

*הביטוי "נבוכדנצר הוא פיל אפריקאי גדול" הוא פסוק (ניתן לטעון על הביטוי אם הוא אמת או שקר). הביטוי "נבוכדנצר הינו פיל אפריקאי קטן" לא שולל את הפסוק לעיל. פסוק שיכול לשמש כשלילה הינו "נבוכדנצר אינו פיל אפריקאי גדול".*

*מכאן אנו מבינים כי* ***פסוק ושלילתו מכסים את כל המקרים האפשריים בקשר לפסוק.***

*דוגמא נוספת: הפסוק "3 גדול מ-2" לא שולל את הפסוק "2 גדול מ-3", היות וניתן לטעון גם כי "4 גדול מ-2". במילים אחרות, הפסוק ושלילתו, כביכול, לא מכסים את כל האפשרויות.*

*הפסוק "5=1+1 וגם 4=2+2" הוא פסוק המורכב משני פסוקים שונים עם חיבור "וגם" ביניהם. אם נניח כי הפסוק הראשון בפסוק המורכב הוא p ונניח כי הפסוק השני בפסוק המורכב הוא q הרי שטבלת האמת של "וגם" (הסימון "וגם" נראה כך: ) נראית כך:*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | *q* | *p* |
| *T* | *T* | *T* |
| *F* | *F* | *T* |
| *F* | *T* | *F* |
| *F* | *F* | *F* |

*ולכן, הפסוק המוצג לעיל הוא פסוק שקר.*

*הפסוק "5=1+1 או 4=2+2" הוא פסוק המורכב משני פסוקים שונים עם חיבור "או" ביניהם. טבלת האמת של "או" (הסימון "או" נראה כך: ) נראית כך:*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | *q* | *p* |
| *T* | *T* | *T* |
| *T* | *F* | *T* |
| *T* | *T* | *F* |
| *F* | *F* | *F* |

*ולכן, הפסוק לעיל הוא אמת.*

*הפסוק "אם 100=2 אז 9=5+2" הוא פסוק מורכב מסוג "אם... אז...". טבלת האמת של "אם... אז..." (הסימון של "אם... אז..." נראה כך ) נראית כך:*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | *q* | *p* |
| *T* | *T* | *T* |
| *F* | *F* | *T* |
| *T* | *T* | *F* |
| *T* | *F* | *F* |

*ולכן, הפסוק לעיל הוא אמת.*

*הערה: במשפטי "אם... אז..." הלוגיקה שונה מאשר העברית הפשוטה. למשל, בדוגמא הבאה, בעברית אנו פוסלים את המשפט וטוענים כי הוא שגוי (בגלל הפסוק הראשון שבו) אך לפי כללי הלוגיקה המשפט הוא אמת, בזכות רכיבו השני.*

*דוגמא נוספת: "אם 100=2 אז 7=5+2" הוא פסוק מורכב מסוג "אם... אז..." שגם הוא פסוק אמת.*

***תרגיל:***

*הצג את לוח האמת של הפסוק הפורמלי הבא*

***פתרון:***

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | *r* | *q* | *p* |
| *T* | *T* | *T* | *T* |
| *F* | *F* | *T* | *T* |
| *T* | *T* | *F* | *T* |
| *F* | *F* | *F* | *T* |
| *T* | *T* | *T* | *F* |
| *T* | *F* | *T* | *F* |
| *T* | *T* | *F* | *F* |
| *T* | *F* | *F* | *F* |

***שקילויות שימושיות***

***שלילה כפולה:***

***חילוף: וגם***

***קיבוץ: וגם***

***פילוג: וגם***

***כללי דה-מורגן: וגם***

***עיקרון ה-contrapositive:***

***הבעת חץ בעזרת קשרים אחרים:***

*דוגמא לפיתוח שקילות (לפי השאלה לעיל):*

*הערה: אם נדרשת הוכחה ומשתמשים בשקילות, יש לציין בכל מעבר באיזה סוג שקילות נעשה שימוש.*

***הגדרה: טאוטולוגיה – פסוק שכל לוח האמת שלו אמיתי.***

*הפסוק הפורמלי הוא* ***סתירה*** *מכיוון שבטבלת האמת שלו התוצאה תמיד F.*

***תרגיל:***

*האם הפסוק שקול טאוטולוגית לפסוק ?*

***פתרון:***

*ואז ל- ול- אין את אותה טבלת אמת ולכן אינם שקולים.*

***תרגיל:***

*האם הפסוק שקול טאוטולוגית לפסוק ?*

***פתרון:***

*ולכן שקולים טאוטולוגית.*

**תרגיל:**

האם הפסוק שקול טאוטולוגית לפסוק ?

**פתרון:**

כלומר, הטענה נכונה.

**תרגיל:**

האם הפסוק שקול טאוטולוגית לפסוק ?

**פתרון:**

ניתן לבצע את המעבר השני מכיוון ש- כאשר α סתירה.

כלומר, הטענה נכונה.

**תרגיל:**

האם שלילת הפסוק "אם זה לא יקרה היום אז זה יקרה מחר או מחרתיים" שקולה לפסוק: "זה לא יקרה יום, לא יקרה מחר ולא יקרה מחרתיים"?

**פתרון:**

נשתמש כאן בהצרנה. כלומר, הפיכת המשפט מעברית לפסוקים פורמליים.

יקרה היום p =

יקרה מחר q =

יקרה מחרתיים r =

הפסוק הנתון הוא: ושלילתו היא:

נפתח:

תוצאת הפיתוח, בתרגום חזרה למשמעות בעברית: "זה לא יקרה היום וגם זה לא יקרה מחר וגם זה לא יקרה מחרתיים". כלומר, ישנה שקילות.

**הערה:** ניתן בהחלט להציג את שני המשפטים בצורה פורמלית וליצור טבלת אמת לכל אחד מהם. אם התוצאה זהה, הרי ששתי הטענות שקולות.

**יחסים בין פסוקים:**

**שקילות. אם ורק אם לאלפא ולביתא יש את אותו לוח אמת.**

**לדוגמא: ו-. אלפא וביתא לא שקולים כי בשורה בה p ו-q אמיתיים ו-r ו-s שקריים מתקיים כי אלפא אמת ואילו ביתא הוא שקר.**

**אלפא גורר טאוטולוגית את ביתא או ביתא נובע טאוטולוגית מאלפא. פירוש הדבר: בכל שורה בלוח האמת שבה מתקיים כי אלפא אמת הרי שגם ביתא אמת.**

**ומכאן,  *אם ורק אם וגם .***

***תרגיל:***

*האם מתוך הפסוק נובע טאוטולוגית הפסוק p?*

***פתרון:***

*נגדיר וגם . נשאלת השאלה, האם ?*

התשובה היא לא. דוגמא נגדית לכך היא p שקרי, q שקרי ו-r אמיתי. במקרה כזה אלפא אמיתי אבל ביתא שקרי. לכן, ביתא אינו נובע מאלפא.

**תרגיל:**

הוכח או הפרך:

אם מתוך סתירה כלשהי נובע אז מ-α נובע β¬.

**פתרון:**

הטענה אינה נכונה. להלן דוגמא נגדית: נניח כי וכי וגם כי . מתקיים (לפי הנתון) ש-. בלוח האת אין שורות בהן אמיתי ולכן האמירה " בכל שורה שבה אמיתי אז גם אמיתי" נכונה. לכן . אבל, כי בשורה בה p ו-q אמיתיים אלפא אמיתי ואילו β¬ שקרי.

**תרגיל:**

הוכך או הפרך:

אם מתוך טאטולוגיה כלשהי נובע אז מ-α¬ נובע β.

**פתרון:**

הטענה נכונה.

נתון כי נובע מטאוטולוגיה . לכן, בכל שורה בה אמיתי גם אמיתי. טאוטולוגיה ולכן  *אמיתי בכל השורות. מכאן, אמיתי בכל השורות ולכן גם טאוטולוגיה.*

*נניח כי* α¬ *אמיתי בשורה כלשהי בלוח האמת. כלומר* α *שקרי בשורה זו. מכיוון ש-טאוטולוגיה, הרי שבאותה שורה בה* α *שקרי,* β *חייב להיות אמיתי באותה שורה. מכאן, - מש"ל.*

**תרגיל:**

נתבונן בפסוק "כל מספר שלילי קטן מהריבוע שלו". אילו מהפסוקים נכונים?

1. את הפסוק האמור ניתן לכתוב כך:
2. את הפסוק האמור ניתן לכתוב כך:
3. את הפסוק האמור ניתן לכתוב כך:

**פתרון:**

1. בסעיף זה כתוב : "אם כל מספר שלילי, אז כל מספר קטן מהריבוע שלו". משפט זה אינו תואם את הפסוק המבוקש.
2. בסעיף זה כתוב: "כל מספר קטן מ-0 וגם כל X קטן מ-X בריבוע". משפט זה אינו תואם את הפסוק לעיל. הבהרת המנחה: אין קשר בין האיקסים ברכיבו הראשון של הביטוי לבין האיקסים ברכיבו השני. האיקסים ברכיבו הראשון מוכללים , ולכן אינם ספציפיים וניתן להשמיטם מהניסוח העברי ולקבל ביטוי שקול . האיקסים ברכיבו השני הם משתנים "אמיתיים" שלא ניתן להשמיטם מהניסוח העברי של הביטוי ושהופכים הביטוי ל "לא פסוק". נהוג לקרוא לביטוי כזה "תבנית פסוק".
3. בסעיף זה כתוב: "לכל מספר, אם הוא שלילי, אז הוא קטן מהריבוע שלו". משפט זה תואם את הפסוק לעיל.

**תרגיל:**

הוכח או הפרך:

את שלילת הפסוק: "כל חייזר רעב עוזב את מקום הולדתו כדי לחפש אוכל", ניתן לנסח כך: "כל חייזר שאינו רעב לא עוזב את מקום הולדתו כדי לחפש אוכל".

**פתרון:**

נגדיר x: משתנה המקבל ערכים מעולם החייזרים.

נגדיר p(x): "x רעב" (סוג של תבנית פסוק).

נגדיר q(x): "x עוזב את מקום הולדתו כדי לחפש אוכל" (סוג של תבנית פסוק).

הפסוק בשאלה נראה כך: ושלילתו של פסוק זה נראית כך:

נרשום כעת הצרנה של הפסוק: "כל חייזר שאינו רעב לא עוזב את מקום הולדתו כדי לחפש אוכל" –

נפתח כעת את המשפט הראשון:

ואז:

כלומר, הטענה אינה נכונה.

**תרגיל:**

האם ניתן לנסח את שלילת הפסוק: "קיים חייזר שהוא רעב או צמא" בפסוק: "כל חייזר אינו רעב ואינו צמא"?

**פתרון:**

נגדיר r(x): "x צמא"

הפסוק הראשון בשאלה הוא: ושלילתו היא: .

נפתח את המשפט:

*פירוש התוצאה הסופית של הפיתוח הוא: "כל חייזר אינו רעב ואינו צמא". כלומר, הטענה נכונה.*

***תרגיל:***

*הוכח או הפרך:*

*את שלילת הפסוק: "לכל x שנבחר קיים y המקיים " ניתן לנסח כך: "יש מספר x שעבורו קיים y המקיים ".*

***פתרון:***

*הפסוק הראשון: ושלילתו: .*

*מפתחים:*

הפסוק השני:

הפסוק השני והשלילה של הפסוק הראשון אינם שקולים ולכן הטענה אינה נכונה.

**תרגיל:**

האם את שלילת הפסוק: "יש מספר x שגדול מכל מספר y" ניתן לנסח כך: "לכל מספר x קיים מספר y שגדול או שווה ל-x"?

**פתרון:**

הפסוק הראשון: ושלילתו היא:

פיתוח:

תוצאת הפיתוח היא בדיוק המשפט השני. לפיכך, הטענה נכונה.

**שיעור 2 – 15.3.13**

**קבוצה היא אוסף של איברים, אך לא כל אוסף של איברים הוא קבוצה.**

**נסמן קבוצה בעזרת הצומדיים { }.**

למשל:

**איבר בקבוצה יסומן כך:**

**איבר שאינו בקבוצה יסומן כך:**

**כאשר קבוצה מוכלת באחרת היא נקראת גם תת קבוצה ומסומנת כך:**

**כאשר קבוצה מוכלת באחרת ואינה שווה לה, הסימון יראה כך:**

**קבוצה ריקה הינה קבוצה בה אין איברים:**

**קבוצת המספרים הטבעיים (בקורס זה כוללת את 0):**

***קבוצת החזקה הינה קבוצת כל תתי הקבוצות של קבוצה מסוימת:***

**מספר איברי B הוא 2 ולכן מספר איברי P(B) הוא 2 בחזקת 2, כלומר, 4.**

**ובאופן כללי נכון לומר שאם A קבוצה סופית כלשהי, אז מספר איברי P(A) הוא 2 בחזקת מספר איברי A.**

**פעולות מרכזיות בין קבוצות:**

נגדיר וגם

1. – איחוד בין קבוצות (כל האיברים בשתי הקבוצות). ולפי הדוגמא: .
2. – חיתוך בין קבוצות (איברים המשותפים לשתי הקבוצות). ולפי הדוגמא: .
3. – הפרש. כל האיברים הנמצאים בקבוצה הראשונה (A) ולא נמצאים בקבוצה השניה (B). ולפי הדוגמא: .
4. – הפרש סימטרי. איחוד ההפרשים . ובדוגמא: .

**תרגיל (ופתרון):**

נתונות הקבוצות –

כאשר . אילו מהטענות הבאות נכונות?

1. - לא נכון. קבוצה לא יכולה להיות איבר של עצמה. בנוסף, לקבוצה ריקה אין איברים.
2. - נכון.
3. - לא נכון. ב-B יש רק איבר אחד והוא A.
4. – נכון.
5. - לא נכון. A איבר של B ולא תת קבוצה של B. וגם, ו-ולכן הטענה לא נכונה. נהוג לרשום .
6. – לא נכון. בקבוצת החזקה של A יהיו 2 איברים. בנוסף, האיברים של קבוצת החזקה צריכים להיות קבוצות בעצמם - .
7. - נכון.
8. - נכון.
9. - נכון.
10. - נכון.

**תרגיל (ופתרון):**

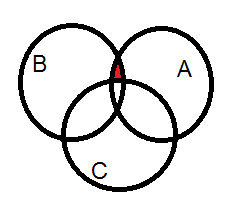
תהיינה A ו-B קבוצות. בכל שורה בטבלה כתוב הוכחה מתאימה בטור המתאים לכל משפט:

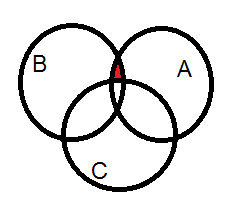
|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **המשפט** | **מתקיים תמיד** | **מתקיים לעיתים (תלוי ב-A וב-B)** | **אף פעם לא מתקיים** |
|  |  | דוגמא תומכת: כאשר אז ובהכרח מתקיים וגם .  דוגמא נגדית: ו- ואז .  במקרה זה ו- ואז ואילו |  |
|  | נניח ש-. מהגדרת האיחוד נובע ש- או . מהגדרת החזקה נובע ש- או . נוכיח כעת כי . נניח ש-(1). אם אז מהגדרת ההכלה , אחרת ואז מהגדרת ההכלה . ומהגדרת האיחוד *(2). מ-(1) ו-(2) ניתן להסיק כי . מהגדרת קבוצת החזקה נקבל כי .*  *ההכלה הדרושה נובעת משתי האמירות המודגשות.* |  |  |
|  | מתקיים תמיד. להוכיח לבד. |  |  |
|  | מתקיים תמיד. להוכיח לבד. |  |  |
|  |  |  | יהיו A ו-B קבוצות כלשהן. מתקיים ו-*. ולכן ו-. מהגדרת החיסור נובע כי אבל כי .*  *מכאן עולה שהטענה אינה נכונה.* |
|  |  | דוגמא תומכת: כאשר אז ומתקיים וגם ואז הטענה נכונה.  דוגמא נגדית: ו- ואז . במקרה זה ו-. כעת, ו-. ואז הטענה אינה נכונה. |  |

**תרגיל:**

A, B, C, D קבוצות. הוכך או הפרך:

**פתרון ל-א':**





מדיאגרמות הוון לעיל ניתן לראות שבסעיף א' השטחים זהים. זוהי רק תמיכה לכך שהמשפט נכון ואין דיאגרמה זו משמשת תחליף להוכחה.

על מנת להוכיח נכונות הטענה יש להוכיח כי:

חלק (i): נניח כי ,

מהגדרת החיסור נובע כי (1) וגם (2). מ-(1) ומהגדרת החיתוך נובע כי (3) וגם (4). מ-(4), (2) ןהגדרת החיסור נובע כי (5). מ-(3), (5) והגדרת החיתוך נובע כי . מכאו נובעת הכלה (i): .

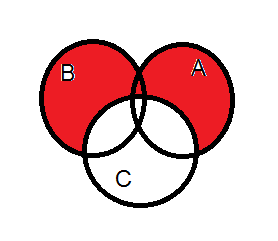
חלק (ii): נניח כי ,

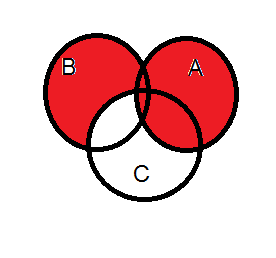
מהגדרת החיתוך נובע כי (1) וגם (2). מ-(2) והגדרת החיסור נובע כי (3) וגם (4). מ-(1), (3) והגדרת החיתוך נובע כי (5). מ-(4), (5) והגדרת החיסור נובע כי . מכאן נובעת הכלה (ii): .

מ-(i) ו-(ii) נובע כי .

כלומר, הטענה נכונה.

**פתרון לחלק ב':**





מדיאגרמות הוון לעיל ניתן לראות כי השטחים של שני חלקי הטענה שונים. זוהי רק תמיכה לכך שהטענה אינה נכונה, ואינו משמש הוכחה לטענה.

נמצא דוגמא נגדית לטענה: נגדיר , .

ואז ומצד שני . ואז, כמובן, מתקיים . כלומר, הטענה אינה נכונה.

**שוויונים חשובים שהוכחו בספר:**

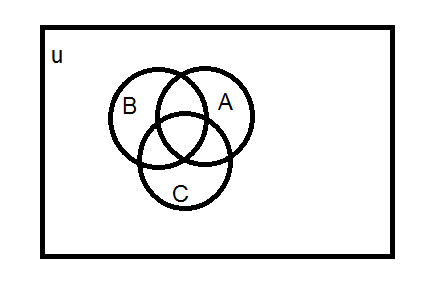
**חוקי חילוף וקיבוץ –**

**חוקי הפילוג –**

**חוקי המשלים –**

**כללי דה מורגן –**

**קבוצה אוניברסלית: קבוצה (u) שכל הקבוצות שבדיון מוכלות בה.**



**ואז ניתן להגדיר לכל את המשלימה שלה A'.**

כעת, נפתור את סעיף א' מקודם, , בדרך האלגברית:

המעבר הראשון אפשרי בגין הזהות היסודית.

המעבר השני אפשרי בגין חוק הקיבוץ.

המעבר השלישי אפשרי בגין הזהות היסודית.

**תרגיל:**

הוכח או הפרך –

**פתרון:**

נגדיר קבוצה אוניבסלית u.

המעבר הראשון אפשרי בגין הזהות היסודית.

המעבר השני אפשרי בגין חוק הפילוג.

המעבר השלישי אפשרי בגין הזהות היסודית.

המעבר הרביעי אפשרי בגין חוק הפילוג.

המעבר החמישי אפשרי בגין הזהות היסודית.

המעבר השישי אפשרי בגין כך שכל איחוד של תת קבוצה עם הקבוצה האוניברסלית שווה לתת הקבוצה.

המעבר השביעי אפשרי בגין כללי דה מורגן.

המעבר השמיני אפשרי בגין הזהות היסודית.

הטענה נכונה.

**שיעור 3 – 22.3.13**

**תרגיל:**

*חשבו מיהן הקבוצות הבאות (והוכיחו את חישוביכם עפ"י ההגדרות המתאימות):*

***פתרון סעיף א'***

*הקבוצה הינה קבוצה ריקה. הסיבה לכך היא ש- הינה קבוצה ריקה ומהגדרת החיתוך נובע ש- ולכן ואז .*

***פתרון סעיף ב'***

*הטענה: . ההוכחה בהכלה דו כיוונית.*

*נראה תחילה ש-. יהי . מהגדרת החיתוך לכל ובפרט . מכאן ניתן להסיק כי .*

*נוכיח כעת את ההכלה בכיוון השני: . יהי . מהגדרת נובע כי (1) וגם כי . כעת, אם אז בוודאי ש-. משתי ההדגשות נובע כי (2). מ-(1) ומ-(2) נסיק כי - וזה נכון לגבי כל . כעת, מהגדרת החיתוך נובע כי ולכן .*

*משתי ההכלות מסיקים את השיוויון: .*

***פתרון סעיף ג'***

*הטענה . נגדיר, לצורך הנוחות, ונוכיח כי . גם כאן נוכיח הכלה דו כיוונית.*

*נראה תחילה כי . יהי . מהגדרת האיחוד קיים כך ש- . מהגדרת נובע ש- (1) וגם (2). מ-(2) נובע כי (3). מ-(1) ו-(3) נובע כי . בזאת הוכחנו כי .*

*נוכיח כעת כי . יהי ולכן (4) וגם (5). מ-(5) נובע כי (6). מ-(5) ו-(6) נקבל כי (7). מ-(4) ומ-(7) ומהגדרת הקבוצות מהטיפוס , נקבל כי . מכאן, מצאנו כך ש-.כעת, מהגדרת האיחוד נקבל ש-. בזאת הוכחנו כי .*

*משתי ההכלות מסיקים את השוויון .*

***פתרון סעיף ד'***

*ראשית, נמצא נוסחא כללית ל- :*

ואז הטענה היא כאשר . גם להוכחה זו נוכיח הכלה דו כיוונית.

נוכיח תחילה ש-. יהי . אז קיים  *כך ש- .* כי ריקה ולכן . לכן, ומכאן x מספר טבעי, אי זוגי וגם גדול או שווה ל-3. לכן ומכאן, .

נוכיח כעת כי . יהי . משייכות זו נסיק כי x הוא מספר טבעי, אי זוגי וגם גדול או שווה ל-3. לכן, קיים טבעי כך ש-. לכן, ומכאן . בזאת הוכחנו כי .

משתי ההכלות נובע השיוויון הדרוש.

***המכפלה הקרטזית (ע"ש R. Descartes)***

***נניח ש-A ו-B קבוצות כלשהן. מגדירים את המכפלה הקרטזית כך: .***

*דוגמא:*

*נגדיר וגם .*

*ואז – .*

*קל מאד לשים לב כי אם ב-A יש n איברים ואם ב-B יש m איברים אז במכפלה הקרטזית יהיו nxm איברים. אם אחת הקבוצות היא אינסופית הרי שאין משמעות לחישוב זה.*

***תרגיל:***

*האם קיימות קבוצות A ו-B כך שהקבוצה מקיימת ?*

***פתרון:***

*לא קיימות A ו-B כאלה.*

*נניח בשלילה שקיימות A ו-B כאלה המקיימות . אז ובפרט וגם ובפרט . מהגדרת נקבל ש- ואז - סתירה לנתון.*

***רלציה מ-A ל-B היא תת קבוצה של המכפלה הקרטזית.***

*למשל, בדוגמא בה השתמשנו לעיל, הקבוצות הבאות הן רלציות מ-A ל-B:*

*הרלציה הריקה*

*הרלציה המלאה*

*המשלים*

*כמה רלציות יש, סה"כ מ-A ל-B בדוגמא לעיל? 2 בחזקת 6, כלומר 64 רלציות שונות.*

***רלציה מ-A ל-A היא רלציה מעל A.***

*דוגמא: נגדיר*

*נסתכל על מבחר רלציות מתוך הרלציות מעל A:*

*רלצית הזהות/היחידה/האלכסון*

*ישנן מספר תכונות עיקריות המאפיינות רלציות (לא חובה שיהיו להן תכונות אלה). נסביר ונדגים על הרלציות לעיל.*

***רפלקסיביות – R רפלקסיבית אם ורק אם***

*בדוגמא לעיל הרלציות הרפלקסיביות הן . כלומר,* ***R רפלקסיבית אם ורק אם*** *.*

***סימטריות – R סימטרית אם ורק אם***

*בדוגמא לעיל הרלציות הסימטריות הן .*

***הגדרה:***  *ולדוגמא . וכעת ברור ש-****R סימטרית אם ורק אם .***

***אנטיסימטריות – R היא אנטיסימטרית אם ורק אם***

*בדוגמא לעיל הרלציות האנטיסימטריות הן . ניתן לראות כי* ***R היא אנטיסימטרית אם ורק אם*** *.*

***טרנזיטיביות – R טרנזיטיבית אם ורק אם***

*בדוגמא לעיל הרלציות הטרנזיטיביות הן .*

*הערה: רלציה 8 היא טרנזיטיבית "על ריק" – מכיוון שיש בה רק זוג סדור אחד.*

***כפל רלציות: נניח כי R ו-S רלציות מעל A. אז, .***

*לדוגמא: ו-.*

*נחשב כעת את :* . לצורך ההבהרה נראה כי בזוג הסדור הראשון מקבלים את 1 מה- של R10 ואת 2 מה- של 11R. אם, למשל, נרצה לחשב את נקבל תוצאה שונה: .

נחשב כעת את : . הזוגות הסדורים ב- הם מהגדרתם הזוגות שצריכים להיות ב-7R אם 7R היא טרנזיטיבית. כלומר, **R טרנזיטיבית אם ורק אם** .

**שיעור 4 – 5.4.13**

**הסגור (Closure) של רלציה R ביחס לתכונה מסוימת: נניח ש-R רלציה מעל קבוצה A. ונניח ש-P היא תכונה מסוימת. אם קיימת רלציה S שעונה על שלושת התנאים הבאים:**

1. **S מקיימת את P**
2. **S היא הרלציה הקטנה ביותר שמכילה את R ומקיימת את P[[1]](#footnote-1)**

**אז S היא הסגור של R ביחס לתכונה P.**

**לדוגמא:** . נניח ש- ו-P היא תכונת הסימטריות. מהו הסגור הסימטרי של R? התשובה תהא .

קל לראות ולהבין שאם R רלציה כלשהי מעל קבוצה A כלשהי, אז תמיד יהיה ל-R סגור סימטרי שיהיה שווה ל-. כמו-כן, יהיה לו סגור רפליקסיבי והוא יהיה שווה ל- (בדוגמא לעיל הסגור הרפליקסיבי של R הינו ).

**תרגיל:**

האם לרלציה לעיל יש סגור אנטיסימטרי?

**פתרון:**

כן, R בעצמה. כל רלציה המקיימת את התכונה P מהווה את הסגור של עצמה ביחס לתכונה P.

נתבונן כעת ברלציה . לרלציה הזאת אין סגור אנטיסימטרי כי אין רלציה אנטיסימטרית S שמקיימת .

האם הרלציה טרנזיטיבית? התשובה היא, **לא**. למשל, וגם אבל . ולכן, הסגור הטרנזיטיבי צריך להיות .

מסתבר שתמיד יהיה סגור טרנזיטיבי לכל רלציה R מעל לקבוצה A (סופית או אינסופית) והוא מתקבל על ידי הנוסחא .

**תרגיל:**

יהי J היחס הבא מעל הקבוצה : אם ורק אם . קבע אם J טרנזיטיבי.

**פתרון:**

לא. דוגמא נגדית: וגם אבל ולכן J לא טרנזיטיבית.

**תרגיל:**

חשב את הסגור הטרנזיטיבי של J: .

**פתרון:**

לשם מציאת הסגור הטרנזיטיבי של J, נחשב תחילה את כל החזקות של J. נתחיל עם .

אם ורק אם אם ורק אם קיים כך ש- וגם . זה אם ורק אם כך ש- וגם .

יש לשים לב כאן כי אם קיים Z כזה אז . כלומר, קיבלנו שמתקיים . *ולכן, אם אז (1). נראה כעת שאם אז . לשם כך, נראה שקיים Z כך ש- וגם . נגדיר ואז יתקיים . קיבלנו שאם אז עבור מתקיים וגם . מכאן וגם ולכן, (2).*

*מ-(1) ו-(2) נובע כי אם ורק אם .*

*כעת ההשערה היא כי לכל מתקיים אם ורק אם . נוכיח את ההשערה באינדוקציה מתימטית. בהתחלה, נוכיח עבור . ההוכחה נובעת מעצם ההגדרה של J. נניח שהטענה נכונה עבור , כלומר ההנחה תהיה אם ורק אם . נראה שבעזרת ההנחה ניתן להוכיח כי הטענה נכונה עבור . במילים אחרות, יש להוכיח ש-* אם ורק אם .

כעת, אם ורק אם . זה קורה אם ורק אם קיים כך ש- וגם (לפי הגדרת כפל רלציות). ע"פ הנחת האינדוקציה וע"פ הגדרת J, זה קורה אם ורק אם קיים כך ש- וגם . מכאן, אם קיים Z כזה, אז הרי ש-. בזאת הוכחנו כי אם אז (3).

כעת נוכיח שאם אז . נרצה להוכיח שקיים כך ש- וגם . נבחר . כעת, ולכן, , וגם החלק השני הוא ולכן מתקיים גם . מכאן, לפי הנחת האינדוקציה, (4). מהוכחות (3) ו-(4) נובע כי . כלומר, .

בזאת הוכחנו את הטענה אם ורק אם .

זאת ההוכחה באינדוקציה להשערה בה לכל מתקיים אם ורק אם . נותר לחשב את הסגור הטרנזיטיבי של J. זהו האיחוד .

נניח ש-. אז ו-. לכל מספר ממשי ניתן למצוא מספר טבעי גדול ממנו ולכן קיים כך ש-. כמובן שניתן להניח ש-. מכאן, ומהטענה שהוכחנו קודם . מצאנו כך ש- ולפי הגדרת האיחוד נקבל ש- ולכן, *. כמובן שמתקיים גם כי כל רלציה היא תת קבוצה של המכפלה הקרטזית. מכאן, .*

*הערה: גם מכאן רואים ש-J אינה טרנזיטיבית היות והסגור הטרנזיטיבי שלה הוא הרלציה המלאה.*

***יחס E מעל A נקרא יחס שקילות אם ורק אם הוא רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי.***

**לדוגמא:** *. נגדיר 3 יחסים ונראה אם הם יחסי שקילות:*

*יחס 1:*

*יחס 2:*

*יחס 3:*

*היחס הראשון הוא יחס שקילות היות והוא גם טרנזיטיבי, גם רפלקסיבי וגם סימטרי.*

*היחס השני הוא יחס שקילות היות והוא גם טרנזיטיבי, גם רפלקסיבי וגם סימטרי.*

*היחס השלישי אינו יחס שקילות. ע"מ שיהיה כזה חסר לו את הזוג הסדור (2,2).*

***כל יחס שקילות יוצר חלוקה של הקבוצה A למחלקות שקילות. זוהי חלוקה של קבוצה A לקבוצות זרות, לא ריקות, שאיחודן נותן את A.*** *למשל, הרלציה מחלקת את A ל-5 מחלקות שקילות, כדלקמן: , ובסימון החלוקה, .*

*דוגמא נוספת, הרלציה מחלקת את A ל-3 מחלקות שקילות, כדלקמן: .*

*נציין כי סימון נהוג, בהמשך לסימון של לעיל, ליחס שקילות של מחלקה אחת (כל איברי הקבוצה A) הינו .*

**עוד דוגמא:**

*נגדיר יחס E באופן הבא: אם ורק אם . זוג סדור, למשל, השייך ל-E הוא . זוג סדור, למשל, שאינו שייך ל-E הוא .*

*נוכיח ש-E היא יחס שקילות:*

*רפלקסיביות – יהי אז ולכן ומכאן . ולכן E רפלקסיבית.*

*סימטריות – נניח שמתקיים , אז מתקיים גם . אבל ולכן, , ולכן . מכאן, E סימטרית.*

*טרנזיטיביות – נניח כי וגם . לכן מתקיים גם וגם . מכאן, . אבל, . ולכן, . מכאן, ולכן E טרנזיטיבי.*

*מ-3 התכונות המוכחות לעיל נובע כי E היא יחס שקילות.*

*כעת, בהמשך לדוגמא, נתבונן בקבוצה הריקה. . נסמן את המחלקה של ביחס השקילות E:* . למשל, אבל קבוצה המכילה את 1 לא תיכלל.

נתבונן עתה בקבוצה : .

כעת נשים לב כי ולכן .

**שיעור 5 – 12.4.13**

***תרגיל:***

*. נגדיר את E באופן הבא: אם ורק אם זוגי. בדוק האם מדובר ביחס שקילות.*

***פתרון:***

*רפלקסיביות: יהי . במקרה זה . ו-0 הוא מספר זוגי ולכן* .

סימטריות: נניח ש-. לכן, זוגי. אבל, גם זוגי. על כן גם ולכן E סימטרי.

טרנזיטיביות: נניח ש- וגם . מכאן, זוגי וגם זוגי. לכן, זוגי (כי הוא סכום של זוגיים ולכן זוגי). על כן, . לפיכך E טרנזיטיבי.

משלוש הבדיקות לעיל עולה כי E יחס שקילות.

נאתר כעת את כל מחלקות השקילות:

. נמצא את . .

. נמצא את . .

אבל  *(האיחוד הוא רק המספרים השלמים) ולכן, יש מחלקות נוספות.*

*למשל, אבל וגם . נמצא, אם כן, גם את כדלקמן:*

*אבל, כמובן, גם מחלקה זו לא מכסה את כל המחלקות האפשריות. קל כבר להבין מכאן כי מדובר באינסוף מחלקות המחלקות את E. לפיכך, נצטרך לרשום נוסחא כללית שתכסה את כל האפשרויות.*

*יהי . נבדוק מהי . .*

*טענה: אם נרשום את לכל אז רשמנו את כל המחלקות, וכל מחלקה נרשמה פעם אחת בלבד.*

*נוכיח תחילה שכל מחלקה נרשמה פעם אחת בלבד: נניח בשלילה שלא כך הדבר. אז קיימים ו- כך ש- אבל . מכאן, ולכן הוא מספר זוגי. אבל, וגם ולכן . כלומר, ואז , סתירה. לפיכך, הנחת השלילה שגויה ועל כן רשמנו כל מחלקה בדיוק פעם אחת.*

*נוכיח כעת שכל המחלקות נרשמו: יהי כלשהו. נוכיח שקיים כך ש-. ולכן y מספר ממשי. קיים מספר זוגי z כך ש-. נבחר את z להיות הזוגי הכי גדול שמקיים זאת. לכן, . מכאן מתקיים . נסמן את להיות . אז וגם ו-z הוא זוגי. לכן הוא זוגי ואז בהכרח מתקיים ומכאן . כלומר, מצאנו כך ש-.*

*לסיכום: עבור מתקיים . כל המחלקות שרשמנו שונות זו מזו (ולכן זרות זו לזו) ואין מחלקות נוספות.*

***פונקציה של קבוצה A לתוך קבוצה B: תהיינה A ו-B קבוצות כלשהן. פונקציה f של A לתוך B הינה התאמה, המתאימה לכל איבר מ-A, איבר אחד ויחיד מ-B.***

*לדוגמא: ו- אז ההתאמות או או למשל, הן פונקציה מ-A ל-B. נסמן פונקציה זו באות f. ניתן לתאר את f כרלציה מ-A ל-B באופן הבא: .*

*אם על ידי ההתאמה מתקבלים כל איברי B אזי הפונקציה המתקבלת היא* ***פונקציה על****. אם על ידי ההתאמה כל איבר של B מתקבל לכל היותר פעם אחת אזי הפונקציה המתקבלת היא* ***פונקציה חח"ע*** *(חד-חד ערכית).*

***להלן המחשה על ידי דוגמאות ל-f מ- ל-:***

*מוגדרת על ידי .*

*מוגדרת על ידי .*

*הפונקציה איננה על כי אך לא קיים כך ש-. עם זאת, היא חח"ע: נתון נניח ש- ונוכיח כי . מההנחה נובע כי ומכאן .*

*הפונקציה אינה חח"ע כי אבל . עם זאת, היא על. נוכיח זאת על ידי כך שנראה שלכל קיים כך ש-. ואמנם: יהי . נגדיר ולכן וגם ולכן . כלומר, מצאנו x כנדרש ולכן היא על.*

***דוגמא נוספת:***

*נגדיר . נגדיר באופן הבא: לכל מתקיים* . למשל כי רק 1 מחלק את 1. כי ורק הם, מחלקים את 6. איננה חח"ע כי לכל x ראשוני מתקיים (כל מספר ראשוני מתחלק בעצמו וב-1 וכל המספרים הראשוניים שונים זה מזה). עם זאת, היא על: יהי . נמצא x כך ש-. נגדיר את x להיות . המחלקים השונים של x הם בדיוק . כלומר, בדיוק y מחלקים שונים. לכן, . לאור הכתוב עולה כי היא על.

**יחס שקילות המושרה על ידי פונקציה: תהי פונקציה. נגדיר יחס מעל A באופן הבא – לכל מתקיים  *אם ורק אם .***

*קל מאד לזהות שמדובר ביחס שקילות –*

*רפלקסיביות: נניח ואז מתקיים ולכן ומכאן רפלקסיבית.*

*סימטריות: נניח ש- מקיימים אז ולכן ומכאן ולכן סימטרית.*

*טרנזיטיביות: נניח ש- מקיימים וגם . לכן, וגם ומכאן נובע ש-. לפיכך, ולכן טרנזיטיבית.*

*משלוש ההוכחות לעיל עולה כי הוא יחס שקילות. נקרא יחס שקילות המושרה על ידי הפונקציה g.*

***נחזור לדוגמא הקודמת:*** *נתבונן ביחס שהוא כמובן יחס מעל . נמצא את .*

1. *וכמובן לכל y ראשוני מתקיים*

***תרגיל:***

*הוכח כי למספר טבעי שונה מ-0 יש בדיוק 3 מחלקים שונים אם ורק אם הוא ריבוע של מספר ראשוני.*

***פתרון:***

*חלק ראשון – יהי x שהוא ריבוע של מספר ראשוני. כלומר, קיים p ראשוני כך ש-. לכן, מחלקיו של x הם בדיוק ולכן . כלומר ל-x בדיוק 3 מחלקים.*

*חלק שני – נניח כעת של-x יש 3 מחלקים שונים בדיוק. אז כי ל-1 מחלק יחיד. אינו ראשוני כי לראשוני יש 2 מחלקים בדיוק. כמו-כן, כאשר p ראשוני ו- כי ל- יש מחלקים ולכן יותר מ-3 מחלקים.*

*טענת עזר: ל-x אין יותר מראשוני אחד שמחלק אותו.*

*הוכחה לטענת עזר: נניח שיש יותר מראשוני אחד שמחלק את x. נבחר 2 ראשוניים כאלה p ו-q. ברור ש- וגם ש-וברור כי כולם מחלקים של x. ולכן ל-x יש לפחות 4 מחלקים שונים – סתירה.*

*חזרה לפתרון: נשארה רק אפשרות אחת שלא פסלנו: כאשר p ראשוני. מש"ל.*

***תרגיל לבית:***

*הוכח כי .*

***תרגיל:***

*הוכח שלכל מספר טבעי n המקיים מתקיים מתחלק ב-8 ללא שארית.*

***פתרון:***

*ההוכחה תהיה באינדוקציה.*

*שלב א': בודקים נכונות עבור הביטוי הוא שלוש בריבוע פחות אחד, המתחלק, כמובן, ב-8.*

*שלב ב': מניחים נכונות עבור מניחים נכונות עבור . כלומר, מתחלק ב-8 ללא שארית.*

*שלב ג': מוכיחים נכונות עבור . כלומר נוכיח כי מתחלק ב-8 ללא שארית. ולצורך העניין –*

*החלק המודגש באדום מתחלק ב-8 כמכפלה של 8 עצמו. החלק הירוק מתחלק ב-8 לפי הנחת האינדוקציה. אבל, סכום של שני מספרים המתחלקים ב-8 מתחלק גם הוא ב-8. לפיכך, מתחלק ב-8. מש"ל.*

*לפיכך, סכום של שני מספרים המתחלקים ב-8 מתחלק גם הוא ב-8.*

***יחס סדר חלקי:***

***נניח ש-A קבוצה. יחס T מעל ל-A נקרא יחס סדר חלקי אם ורק אם מקיים 3 תנאים:***

1. ***רפלקסיבי.***
2. ***אנטיסימטרי.***
3. ***טרנזיטיבי.***

***לדוגמא:***

*. אם ורק אם . נוכיח כי מתקיימים כל 3 התנאים:*

1. *רפלקסיביות: לכל מתקיים ולכן .*
2. *אנטיסימטריות: נניח ש- וגם . במקרה זה מתקיים מספר שלם ולכן ומצד שני מתקיים מספר שלם ולכן . מכאן עולה כי ולכן T אנטיסימטרית.*
3. *טרנזיטיביות: - להשלים בבית -.*

*מ-3 התנאים לעיל עולה כי T יחס סדר חלקי מעל A.*

***מושגים בסיסיים ביחס סדר חלקי:***

* *אומרים ש-x קטן או שווה ל-y לפי היחס T אם ורק אם והסימון הוא .*
* *אומרים ש-x קטן מ-y לפי היחס T אם ורק אם וגם .*
* *אומרים ש-x לא מתייחס ל-y ביחס T א ורק אם .*

***נניח ש-T הוא יחס סדר חלקי מעל A. איבר מינימאלי ב-A ביחס ל-T הינו איבר y המקיים שלא קיים x כך ש-x קטן מ-y ביחס לסדר T.***

***איבר קטן ביותר ביחס ל-T הוא איבר y המקיים שלכל x, y קטן או שווה ל-x ביחס לסדר T.***

***לדוגמא:***

*נתבונן בקבוצה . נגדיר T כך: אם ורק אם מספר שלם. T הוא סדר חלקי מעל A (הוכח בבית). 7 הוא מינימלי ב-A ביחס ל-T כי אם אז שלם ולכן . כלומר, לא קיים x כך ש-x קטן מ-y ביחס לסדר לפי 4. לכן, 7 איבר מינימלי. בדומה, כל ראשוני הוא מינימלי. מספר לא ראשוני הוא לא מינימלי כי אם y לא ראשוני אזי יש כך ש-. כלומר, x קטן לפי היחס T.*

***תרגיל:***

*הוכח כי אם יש שני מינימלים שונים זה מזה אז אין איבר קטן ביותר.*

***פתרון:***

*יהיו שני מינימלים שונים. כלומר . נניח בשלילה שיש z קטן ביותר. או אז, לכל x מתקיים ולכן . אבל מינימלי ולכן (1). מצד שני, וגם מינימלי ולכן, (2). מ-(1) ומ-(2) נקבל - סתירה.*

**שיעור 6 – 19.4.13**

***תרגיל:***

*נגדיר ונגדיר T באופן הבא: אם ורק אם מספר שלם. היחס הזה הוא רפלקסיבי, אנטיסימטרי וטרנזיטיבי (מוכח בספר) – כלומר זהו יחס מסדר חלקי. האם יש איבר קטן ביותר? איבר מינימאלי? איבר גדול ביותר? איבר מקסימאלי?*

***פתרון:***

*1 הוא האיבר הקטן ביותר. זה נכון כי לכל . 1 הוא גם המינימאלי (כי הוא הקטן ביותר) והוא גם מינימאלי יחיד.*

*כדי לבדוק אם יש איבר מקסימאלי נבדוק אם יש כך שלא קיים כך ש-. נניח בשלילה שיש איבר x כזה. אם כך, אז ו- מספר שלם אז לכן, וזו סתירה. לפיכך, לא קיים איבר מקסימאלי. כעת, אם לא קיים איבר מקסימאלי אז לא קיים גם איבר גדול ביותר וזאת כי איבר גדול ביותר הוא גם מקסימאלי.*

***תרגיל:***

*נגדיר ונגדיר T באופן הבא: אם ורק אם קיים כך ש-.*

1. *הוכח שמדובר ביחס מסדר חלקי.*
2. *מצא (אם יש) איבר קטן, איבר מינימאלי, איבר גדול, איבר מקסימאלי.*

***פתרון:***

1. *נתבונן ב-3 ההוכחות הבאות:*
2. *לכל מתקיים ולכן . מכאן, T רפלקסיבית.*
3. *נניח ש- וגם . אז קיים כך ש-וגם קיים כך ש- ואז בכרח מתקיים .*
4. *אם אז מהשוויון נקבל ולכן, .*
5. *אם אז מהשוויון נקבל ש-*. מכיוון ש- טבעיים ומכפלתם שווה ל-1 נקבל ש- וגם אז .

לפיכך, T אנטיסימטרי.

1. נניח ש- וגם . לכן, קיים כך ש-יקיים כך ש-. מכאן,  *ומכיוון ש- טבעיים הרי שגם מכפלתם הוא מספר טבעי ולכן . מכאן, T טרנזיטיבי.*

*משלוש ההוכחות לעיל עולה כי מדובר ביחס מסדר חלקי.*

1. *יש איבר גדול ביותר: 0. לכל מתקיים . קיים כך ש-. ה-z הזה הוא 0. לכן, 0 הוא גם איבר מקסימלי וגם איבר מקסימלי יחיד.*

*כל מספר ראשוני הוא מינימלי: יהי p מספר ראשוני. אם אז כי לא קיים z טבעי כך ש- (כי ו-p ראשוני). מכאן, ברור כי אין איבר קטן ביותר.*

*נשאלת השאלה: האם ישנם איברים מינימליים שאינם מספרים ראשוניים? התשובה: לא. אם שאיננו ראשוני אז או ש- או ש-y פריק. אם y פריק אז בהכרח קיימים כך ש-. משמעות שוויון זה הוא ש- ולכן y לא מינימלי. אם אז הוא בוודאי לא מינימלי כי ו- ולכן המינימליים הם בדיוק כל המספרים הראשוניים.*

***תרגיל:***

*נגדיר וגם . נשים לב כי האיברים של A הם קבוצות של זוגות סדורים כאשר כל קבוצה כזאת היא בעצמה יחס סדר חלקי מעל B. נגדיר יחס T מעל A באופן הבא: אם ורק אם .*

*ברור ש-T הוא יחס סדר חלקי מעל A. טענה כללית יותר (בספר) אומרת שאם A קבוצה שאיבריה קבוצות, אז יחס ההכלה הוא סדר חלקי מעל A.*

1. *האם T הוא יחס מסדר מלא?*
2. *מצא, במידה ויש, את האיבר המקסימלי, הגדול ביותר, המינימלי והקטן ביותר.*
3. *כמה יחסי סדר מלא יש מעל A?*

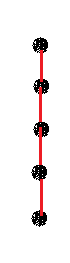
***פתרון:***

1. *T אינו סדר מלא מעל A כי למשל, סדר חלקי מעל B ולכן ו- סדר חלקי מעל B ולכן . אבל ולכן וגם ולכן . המשמעות היא ש-T אינו סדר מעל A.*
2. *נתבונן ב-. הוא סדר חלקי מעל B והוא מקיים לכל S שהוא סדר חלקי מעל B. כלומר, וכל מקיים . לכן הוא האיבר הקטן ביותר בקבוצה A ביחס לסדר T. מכיוון שכך, הוא גם מינימאלי ומינימאלי יחיד.*

*טענת עזר: כל יחס סדר מלא מעל B הוא איבר מקסימאלי בקבוצה A ביחס ל-T. לשם כך נניח כי הוא יחס סדר מלא מעל B וצריך להוכיח שלא קיים יחס סדר חלקי מעל B כך ש- כלומר, .*

*נניח בשלילה שקיים שכזה. אז ו- סדר מלא מעל B ו- סדר חלקי מעל B. לכן, קיימים כך ש- ו-. סדר מלא ובפרט רפלקסיבי ולכן . מכיוון ש- ו- סדר מלא אז ומכיוון ש- אז מתקיים . שלוש החלקים המודגשים מובילים לסתירה לאנטיסימטריות של היחס ולכן הנחת השלילה שלנו שגויה ומכאן, לא קיים ואילו מקסימאלי ב-A ביחס לסדר T.*

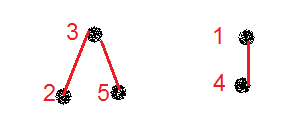
1. *היחס הרגיל הוא דוגמא טובה ליחס סדר מלא מעל הקבוצה B: . אם רוצים לצייר דיאגרמה של היחס הרגיל, היא תיראה כך:*



*מי שנמצא יותר נמוך מתייחס למי שנמצא יותר גבוה וכמובן כל איבר מתייחס לעצמו. כל סדר מלא מעל B מוצג על ידי שרשרת כזאת ולכן יש לנו - יחסי סדר מלא מעל B. מכאן, יש לפחות 120 איברים מקסימליים ב-A לפי היחס T. מכיוון שיש יותר מאיבר מקסימלי אחד, הרי שאין איבר גדול ביותרב-A ביחס ל-T.*

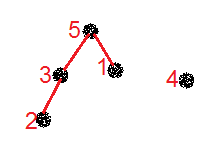
***כל יחס סדר (חלקי או מלא) ניתן לתיאור על ידי דיאגרמת הסה (Hesse). סדר מלא יתואר על ידי שרשרת כאשר כל שיש לעשות הוא לקבוע את סדר האיברים בשרשרת.***

***דוגמא ליחס סדר חלקי:***

**

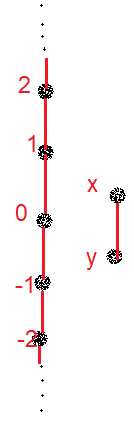
*היחס המתואר לעיל הוא: האיברים המינימאליים הם 2, 5, 4 והאיברים המקסימאליים הם 1, 3.*

***דוגמא נוספת:***

**

*היחס המתואר על ידה הוא: . האיברים המינימאליים הם: 2, 1, 4. האיברים המקסימאליים הם: 4, 5.*

***עוד דוגמא:*** *. הדיאגרמה תיראה כך:*

**

*היחס המתואר ע"י הדיאגרמה הוא: , כאשר T הוא יחס הסדר הרגיל מעל . S הוא סדר חלקי מעל Aץ יש כאן מקסימאלי יחיד, x, שאינו הגדול ביותר וישנו מינימאלי יחיד, y, שאינו הקטן ביותר (מצב שלא יכול לקרות בקבוצה סופית).*

***נניח ש-A ו-B קבוצות כלשהן. אומרים שהעוצמה של A שווה לעוצמה של B אם ורק אם קיימת פונקציה שהיא חח"ע ועל. סימון במקרה זה: .***

***תרגיל:***

*נגדיר ,* . האם ?

**פתרון:**

התשובה היא כן. נתבונן ב- המוגדרת ע"י . פונקציה זו היא חח"ע ועל.

יחס שוויון העוצמות הוא סימטרי מכיוון שמדובר בפונקציה שהיא חח"ע ועל. לפיכך, יש לה גם פונקציה הופכית שהיא חח"ע ועל ואז יתקיים .

העוצמה של A תמיד שווה לעוצמה של A בגלל פונקציית הזהות ולכן רפלקסיבית.

גם טרנזיטיביות מתקיימת ולכן מדובר כאן ביחס שקילות לכל עניין ודבר. העוצמה היא בעצם מחלקת השקילות ביחס השקילות. ובסימון: . עוצמה של קבוצה סופית היא בעצם מספר האיברים בקבוצה. קבוצה בת מניה היא קבוצה שעוצמתה (להרחבה על המכפלה הקרטזית של יש לקרוא עמ' 124 בספר).

לעניין קבוצות אינסופיות הרי שגם ל- וגם ל- העוצמה היא . הסיבה לכך נעוצה בעובדה שאפשר למצוא פונקצייה חח"ע ועל בין לבין כל אחת מהקבוצות הללו. להרחבה, לקרוא עמ' 126 על הוכחה בשיטת האלכסון של קנטור לקבוצה אינסופית שעוצמתה אינה .

**קטע פתוח: יהיו a ו-b מספרים ממשיים המקיימים . הקטע הפתוח בין a ל-b הוא הקבוצה . הסימון המקובל הוא .**

קנטור הוכיח כי אלא .

טענה: לכל .

הוכחה: על מנת להוכיח זאת ננסה להביא את ל- ומכאן ההוכחה של קנטור. לכן, יהי ואז ומכאן . לכן נגדיר על ידי . זו אכן פונקציה מ- ל-. נוכיח כעת שהפונקציה היא חח"ע: יהיו כך ש- ואז . מכאן, ולכן היא חח"ע. נוכיח כעת כי הפונקציה היא על: יהי ואז . אז ניתן גם לבצע . לפיכך נסמן ואז . . כלומר, מצאנו לכל y בקטע x מתאים בקטע כך ש-. לכן, היא על.

מסקנה: .

**שיעור 7 – 26.4.13**

**תרגיל:**

נסמן . במילים אחרות, . נגדיר ע"י הוכח כי חח"ע ועל.

**פתרון:**

יש להראות שלכל קיים פתרון יחיד x השייך לקבוצה A למשוואה . ברור שעבור יש פתרון יחיד *. נניח כעת ש-וגם .*

טענת עזר: המשוואה שקולה למשוואה מעל (מעל A היא כמובן שקולה מכיוון ש-1 ו-1- אינם בטווח הפתרונות האפשריים). גם מעל המספרים 1 ו-1- אינם פותרים את המשוואה השנייה (כי אם אז נקבל ש- 1=0 ואם אז נקבל 1-=0), ולכן המשוואות שקולות. מכאן, כל x הפותר את המשוואה הראשונה פותר בהכרח גם את השנייה, ולהיפך.

כעת נותר להוכיח שלמשוואה יש פתרון יחיד לקבוצה A. זו משוואה ריבועית (נזכור ש-) במשתנה x: .

נבדוק כמה פתרונות ממשיים יש למשוואה זו (לאו דווקא ששייכים ל-A). .

לכן, יש למשוואה זו שני פתרונות ממשיים שונים. נקרא להם . נוכיח שבדיוק אחד מהם שייך לקבוצה A (תזכורת: מכפלת פתרונות משוואה ריבועית שווה ל- כאשר c ו-a הם מקדמים במשוואה הריבועית).

לכן, . מכאן, .

אבל, וגם כי 1 ו-1- לא פתרונות של המשוואה. לכן, אחד מהפתרונות חייב להיות בעל ערך מוחלט גדול ממש מאחד ואילו השני חייב להיות בעל ערך מוחלט קטן ממש מאחד. כלומר, אחד מהפתרונות חייב לא להיות שייך ל-A ואילו השני חייב להיות שייך ל-A. לפיכך, יש בדיוק פתרון אחד השייך ל-A למשוואה הריבועית הנ"ל וכך גם למשוואה המקורית .

מכאן, הפונקציה היא חח"ע ועל.

הוכנו בזאת שהעוצמה של שווה לקטע הפתוח . כלומר *ומכיוון ש— אז גם .*

***תרגיל:***

*הוכח כי .*

***פתרון:***

*נסתמך על תרגיל 4.3 מעמ' 119 שאומר שאם ו- קבוצות זרות, , כך ש- וגם אז .*

*נסמן וגם . ידוע ש-. נניח בשלילה ש-. ברור ש- ולכן מהתרגיל המוזכר לעיל נובע ש- . אבל . ולכן, קיבלנו בסתירה לכך שכבר ידוע לנו כי* .

הוכחנו כי הנחת השלילה שגויה ולכן *.*

**תרגיל:**

נגדיר . A היא קבוצת תת הקבוצות של . מצא את .

**פתרון:**

נשים לב ש-.

נגדיר כעת באופן הבא: . היא פונקציה של לתוך A והיא בוודאי על, שהרי קיבלנו כי . כלומר, לכל קיים כך ש- .

נותר להוכיח ש-היא חח"ע.

יהיו שני מספרים טבעיים. אז מתקיים בהכרח ולכן ולכן בהכרח  *כלומר ולכן היא חח"ע.*

*מכאן, ומכיוון ש- אז גם .*

***הגדרת היחס בין עוצמות: יהיו α ו-β עוצמות. תהי A קבוצה כך ש- ותהי B קבוצה כך ש-. נאמר ש- אם ורק אם קיימת פונקציה חח"ע. נאמר ש- אם ורק אם וגם .***

*אחרי שמראים שההגדרה אינה תלויה בנציגים, אז אפשר להוכיח בקלות את הטענות הבאות:*

1. *היחס (בעזרת הפונקציה החח"ע ע"י ).*
2. *לכל עוצמה סופית n מתקיים באמצעות הפונקציה החח"ע המוגדרת ע"י .*
3. *בספר מראים שאם A אינסופית אז קיימת כך ש- ולכן יש פונקציה חח"ע המוגדרת ע"י . פונקציה זו מעידה על כך ש- . מכאן, לכל עוצמה אינסופית α מתקיים .*

*קנטור הוכיח ש- ולכן . בנוסף, ברור שלכל עוצמות כלשהן, מתקיים:*

1. *רפלקסיביות -*
2. *טרנזיטיביות – אם וגם אז מתקיים .*
3. *אנטיסימטריות – אם וגם אז (משפט קנטור-שרדר-ברנשטיין).*

***תרגיל:***

*הוכח כי אם A קבוצה המכילה קטע פתוח אז מתקיים .*

***פתרון:***

*מהנתון עולה כי . לכן, יש פונקציה חח"ע המקיימת לכל . לכן, ומכאן, . בנוסף ולכן . אבל, ולכן . לכן, לפי משפט קנטור-שרדר-ברנשטיין .*

***משפט קנטור: לכל A מתקיים .*** *בעזרת משפט זה ניתן להוכיח שיש אינסוף עוצמות אינסופיות.*

**חשבון עוצמות:** נניח α ו-β עוצמות.

נרצה להגדיר:

**חיבור עוצמות**

ננסה תחילה להגדיר חיבור עוצמות בעזרת איחוד בין קבוצות: יהיו עוצמות. *תהי A קבוצה כך ש- ותהי B קבוצה כך ש-.* נגדיר להיות .

ננסה לחשב 3+4 בעזרת ההגדרה הנ"ל. ניקח וגם . במקרה כזה נקבל כי . קיבלנו ש-5=3+4.

אם ניקח קבוצות אחרות: וגם . במקרה כזה נקבל כי ולכן 6=3+4.

קיבלנו שתי תוצאות שונות עבור 3+4 ולכן ההגדרה הנ"ל אינה תקינה (כי היא תלויה בנציגים).

**אם נדרוש ש- אפשר להוכיח ש-לא תלויה בנציגים ואפילו מתלכד עם חיבור רגיל כאשר α ו-β סופיות.**

דוגמאות לשימוש בהגדרה:

* נחשב . נגדיר , . ידוע ש- וכמובן . לכן, במקרה זה . כלומר ולכן .
* נחשב את . נגדיר , . . *.* . לכן, . אבל היא קבוצת מספרים על הישר הממשי המכיל קטע פתוח, והוכחנו קודם לכן, שעוצמת קבוצה כזאת היא c ולכן . לפיכך *.*

*בספר (פרק 5) יש את משפט 5.11 הקובע כי לכל k אינסופית מתקיים .*

***תרגיל:***

*עוצמת המספרים האי רציונאליים היא בדיוק c. נסמן ב-A את קבוצת המספרים האי רציונאליים. הוכח כי .*

***פתרון:***

*נניח כי . k עוצמה אינסופית. נסתכל על . ומכיוון ש- אז לפי הגדרת חיבור עוצמות . אבל ולכן* אבל ולכן . אבל k עוצמה אינסופית ולפי 5.11 *מתקיים ולכן .*

**כפל עוצמות**

***נניח ש- ו-. מגדירים להיות .***

*דוגמאות לשימוש בהגדרה:*

* *נחשב . נגדיר . . לכן, . ידוע מהספר ש- ולכן* .
* נחשב *. לשם כך נחשב את העוצמה של . עוצמה זו היא, לפי הגדרת כפל עוצמות, . ידוע ש- ולכן . מוכח בספר ש- אז ברור כי . נתבונן כעת בפונקציה*  המוגדרת ע"י . היא חח"ע ולכן ולכן . משני החלקים המודגשים וממשפט קנטור-שרדר-ברנשטיין נובע ש- . כלומר, *.*

***תרגיל:***

*נניח ש- עוצמות לאו דווקא סופיות כך ש- ו-. הוכח כי .*

***פתרון:***

*נגדיר 4 קבוצות כך ש-. כמובן שכעת מתקיים וגם . יש למצוא פונקציה שהיא חח"ע.*

*ניתן להשתמש בכך שידוע לנו שיש חח"ע, כי נתון , ויש גם , כי נתון .*

*יהי . נגדיר . כמובן שהתוצאה היא ב-. יהיו ו- שני זוגות ב- המקיימים . לכן,*  ומכאן וגם . אבל וגם חח"ע ולכן וגם ולכן ומכאן היא חח"ע. הוכחנו בזאת שמתקיים .

**חזקות של עוצמות**

**יהיו עוצמות. *תהי A קבוצה כך ש- ותהי B קבוצה כך ש-.* מגדירים להיות עוצמת קבוצת כל הפונקציות של B לתו**ך A.

נחשב למשל . נגדיר ו-. נשאלת השאלה, כמה פונקציות יש מ-B ל-A? לכל איבר ב-B יש שתי אפשרויות ב-A ולכן יש אפשרויות לבנות פונקציה מ-B ל-A, כלומר 8 אפשרויות.

לפיכך, קבוצת הפונקציות מ-B לתוך A מכילה 8 פונקציות ומכיוון ש- ו- אז קבוצת הפונקציות הנ"ל מגדירה את העוצמה . לכן, *.*

***אם אז***

***וממשפט קנטור נובע כי .***

*נחשב למשל את . כמובן ש- (לפי הטענה שאם אז ). ולכן מתקיים . בספר, ללא הוכחה, מצוין כי ולכן . כעת, ניתן להוכיח כי ואז מקבלים ש- ולפי משפט קנטור-שרדר-ברנשטיין, .*

*נשאלת השאלה, מה זה ?*

*החישוב הוא: . לכן, זו עוצמה הגדולה ממש מ-c ושווה ל- שגם היא עוצמה הגדולה ממש מ-c.*

**שיעור 8 – 3.5.13**

***תמורות ללא חזרות:***

***הבעיה – בכמה אופנים ניתן לסדר בשורה n עצמים שונים? התשובה - .***

***תרגיל:***

*מצא כמה יחסי סדר חלקי יש מעל הקבוצה .*

***פתרון:***

*נפריד לכמה סוגים של יחסי סדר חלקי, בהתאם למבנה הדיאגרמה –*

1. *"שרשרת" (סדר מלא). כאשר כל האיברים מסודרים בשרשרת ויש היררכיה בגודל ביניהם. סה"כ האפשרויות לסדר את איברי בסדר מלא הוא . כלומר,* ***6*** *אפשרויות ליחסי סדר מלא.*
2. *סידור האיברים בנפרד האחד מן השני, ללא קשר היררכי כאשר כולם מינימאליים וכולם גם מקסימאליים. סידור זה מיצצג את היחס . מכיוון שאין כאן תלות בסדר הרי שמדובר רק באפשרות* ***אחת*** *לסדר זה.*
3. *סידור האיברים במעין משולש כאשר יש איבר אחד מקסימאלי ושניים מינימאליים. לסידור זה יש רק* ***3*** *אפשרויות בקבוצה הנדונה.*
4. *סידור האיברים במעין משולש הפוך כאשר יש שניים מקסימאליים ואחד מינמאלי. גם לסידור זה יש רק* ***3*** *אפשרויות.*
5. *סידור שני איברים בהיררכיה ואילו האיבר השלישי מנותק מהם. כאן, כמו בשרשרת, לכל איבר תפקיד שונה ולכן בדומה לשרשרת גם כאן מספר היחסים הוא . כלומר,* ***6*** *אפשרויות.*

*עקרון הפתרון של תרגיל זה הוא* ***עקרון החיבור*** *כי מפרקים את הפתרון לחלקים שניתן לחברם לאחר מכן ולכן הפתרון של התרגיל הוא: .*

***תמורות עם חזרות:***

***הבעיה – נתונים n עצמים אבל לא כולם שונים. הם מחולקים ל-l סוגים שונים. בכל סוג העצמים נחשבים זהים. נניח שיש עצמים מהסוג ה-i חייב להתקיים . בכמה אופנים ניתן לסדר את n העצמים הללו בשורה? התשובה - .***

***תרגיל:***

*למרצה אילון 12 טושים שחורים, 3 ירוקים, 1 סגול, 1 כחול, 1 אדום. בכמה אפשרויות ניתן לסדרם בשורה?*

***פתרון:***

*לפי הנוסחה לעיל - .*

***תרגיל:***

*נניח שאסור לסדר את 18 הטושים באופן כזה שהכחול, האדום והסגול יהיו סמוכים זה לזה. כמה אפשרויות יש לסידור הטושים כעת?*

***פתרון:***

*התשובה היא: . כאשר X הוא מספר הסידורים בו הצבעים אדום כחול וסגול כן מופיעים ברצף.*

*בכדי למצוא את X נפעיל תהליך דו שלבי:*

* *שלב א' – קביעת הסדר הפנימי בין האדום, הסגול והכחול: אפשרויות.*
* *שלב ב' – מתייחסים אל 3 הטושים הללו כאל טוש אחד ומחשבים את מספר האפשרויות לסדר אותם בשורה עם האחרים. כעת, לצורכי החישוב, יש 16 טושים: 12 שחורים, 3 ירוקים ואחד מעורב. מספר האפשרויות, אם כן, לסדרם כעת בשורה הוא: .*

*כעת מפעילם את* ***עקרון הכפל*** *(מופעל כאשר מבוצע תהליך רב שלבי, כאשר לכל שלב מספר האפשרויות שלו ומספר האפשרויות של כל התהליך הוא כל האפשרויות משלב א' וגם משלב ב' וגם ... משלב n).*

*ולכן: .*

*לפיכך, הפתרון המבוקש הוא: .*

***חליפות בלי חזרות:***

***הבעיה – נתונים n עצמים שונים. בכמה אופנים ניתן לבחור מתוכם k עצמים ללא חזרות ועם חשיבות לסדר הבחירה? התשובה – הפתרון מתבצע בעזרת עקרון הכפל: ומסומנת גם כך: . כמובן שאם התשובה היא 0. אם אז ניתן לכתוב בצורה מקוצרת גם כך: .***

***תרגיל:***

*כמה פונקציות חח"ע יש מהקבוצה לקבוצה ?*

***פתרון:***

*צריך לבחור 3 איברים מקבוצה B בלי חזרה וכל איבר צריך להתאים לאיבר ב-A. התשובה היא, ע"פ הנוסחה לעיל: .*

***תרגיל:***

*בתור לסרט רומיאו ויוליה עומדים 11 אנשים: מונטגיו האב, 4 מבני משפחת קפולט, (כולל קפולט האב) ועוד 6 אנשים שאינם ממשפחות אלו.*

1. *בכמה דרכים ניתן לסדר את התור כך שמונטגיו האב לא יעמוד ליד קפול האב?*
2. *בכמה דרכים ניתן לסדר את התור כך שמונטגיו לא יעמוד ליד קפולט האב?*
3. *ביציאה מהסרט מתקוטטים בני משפחת קפולט בשאלה מי אחראי למותה של יוליה. בכמה דרכים ניתן לסדר את 11 האנשים ביציאה מהסרט כך שאף שני בני משפחת קפולט לא יעמדו זה ליד זה ומונטגיו לא יעמוד ליד בן משפחת קפולט?*

***פתרון:***

1. *יש דרכים לסדר את התור ללא הגבלה. יש דרכים לסדר את התור כך שקפולט האב יעמוד ליד מונטגיו האב. לכן, מספר האפשרויות לסדר את התור כך שהם לא יעמדו זה לצד זה הוא .*
2. *נפריד ל-3 מקרים זרים:*
3. *מונטגיו בראש התור. נבחר אחד מ-6 הנייטרלים לעמוד במקום השני. יש לכך 6 אפשרויות ולאחר מכן נסדר את 9 הנותרים בשורה בכל סדר שהוא. יש לכך אפשרויות שונות. סה"כ יש אפשרויות.*
4. *מונטגיו בסוף התור. תהליך אנלוגי ל-(i) מביא לתשובה זהה אפשרויות.*
5. *מונטגיו אי שם באמצע. בשלב ראשון נבחר עבורו מקום בין המקומות 2 עד 10 (כולל). יש 9 אפשרויות כאלה. בשלב השני יש לבחור לו שני שכנים שיעמדו אחד לפניו ואחד אחריו מתוך קבוצת ששת הנייטרלים. כלומר, . בשלב השלישי נסדר את 8 האנשים שנותרו ויש לכך אפשרויות. סה"כ האפשרויות למקרה זה הן .*

*סה"כ האפשרויות לסעיף זה הוא חיבור שלוש המקרים הזרים: .*

1. *תהליך דו שלבי:*
2. *מסדרים את הנייטרלים בשורה ויש לכך אפשרויות.*
3. *סידור 6 הנייטרלים יוצר 7 "תאים" (או מחיצות) שבהם ניתן לסדר את מונטגיו האב ושאר בני משפחת קפולט. יש לבחור מבין 7 התאים 5 תאים ללא חזרות ועם חשיבות לסדר לצורך שיבוץ 5 האנשים המסוכסכים: אפשרויות.*

*לפיכך, התשובה לסעיף זה היא אפשרויות.*

***חליפות עם חזרות:***

***הבעיה – נתונים n עצמים שונים. בכמה אופנים ניתן לבחור מתוכם k עצמים, עם חזרות ועם חשיבות לסדר? התשובה – מבוסס על עקרון הכפל: .***

***תרגיל:***

*כמה פונקציות יש מ- ל-?*

***פתרון:***

*יש לבחור 3 עצמים מ-B עם חזרות ועם חשיבות לסדר ולכן התשובה היא .*

***תרגיל:***

*כמה טורים צריך למלא בטוטו ע"מ להבטיח זכיה בפרס הראשון?*

***פתרון:***

*התשובה היא . הסבר: כל טור הוא פונקציה מ-16 המשחקים לקבוצה .*

***צירופים בלי חזרות:***

***הבעיה – נתונים n עצמים שונים. בכמה אופנים ניתן לבחור מתוכם עצמים בלי חזרות ובלי חשיבות לסדר? התשובה – אם אז 0. אם אז .***

***תרגיל:***

*צריך לנחש (בלוטו) 6 מתוך 42. כמה אפשרויות יש?*

***פתרון:***

*לפי הנוסחה לעיל:*

***תרגיל:***

*יהי . הוכח את השוויון: .*

***פתרון:***

*תהי קבוצה בת n איברם שונים. במקרה זה מתקיים . ניתן לחשב את גודל קבוצת החזקה גם לפי עקרון החיבור: כאשר היא קבוצת תת הקבוצות של A שיש בהן j איברים בדיוק. יש לזכור רק ש-. כמובן שמתקיים גם לכל ו- שונים זה מזה ולכן ניתן לחשב את גודלה של לפי עיקרון החיבור: כל אחד מה--ים בנפרד ומחברים את התוצאות. - בחירת j איברים מתוך n שונים ללא חזרות וללא חשיבות לסדר ולכן נקבל: . אבל כבר ראינו ש-, ולכן בהכרח מתקיים , כנדרש.*

***תרגיל:***

*במשחק טניס זוגות משחק זוג אנשים נגד זוג אחר. אין הבדל בין התפקידים בזוג. לתחרות טניס זוגות הגיעו 10 אנשים. ביניהם אברהם ויעקב (בסעיפים ג-ה ההנחה היא כי אין בני זוג קבועים).*

1. *כמה משחקים שונים אפשר לארגן בין האנשים אם לכל משתתף יש בן זוג קבוע?*
2. *כמה משחקים שונים אפשר לארגן בין 10 האנשים אם אין בני זוג קבועים?*
3. *אם כל המשחקים האפשריים התקיימו, בכמה משחקים השתתף אברהם?*
4. *בכמה משחקים השתתף אברהם לצידו של יעקב?*
5. *בכמה משחקים השתתפו הן אברהם והן יעקב (שניהם באותו משחק, לאו דווקא כזוג)?*

***פתרון:***

1. *בחירת 2 זוגות מתוך 5, בלי חזרות, בלי חשיבות לסדר (כי זה לא משנה אם זוג X משחק נגד זוג Y או להיפך – זה אותו משחק). לכן: .*
2. *שלב א': בחירת 2 אנשים מתוך 10 שיהוו את הזוג הראשון - .*

*שלב ב': בחירת 2 אנשים מתוך 8 שיהוו את הזוג השני - .*

*ולכן התוצאה היא . תשובה זו יש לחלק ב- כי שני השלבים זהים במהותם ועל כן התשובה הסופית לסעיף זה הינה: .*

1. *שלב א': מספר האפשרויות לבחור שותף לאברהם – 9.*

*שלב ב': מספר האפשרויות לבחור זוג מתחרה - .*

*מכיוון שהשלבים שונים במהותם הפתרון המבוקש הוא: .*

1. *יש לבחור רק את הזוג המתחרה: .*
2. *התוצאה היא כאשר X הוא מספר המשחקים בהם שיחק אברהם נגד יעקב.*

*שלב א': בחירת שותף לאברהם - .*

*שלב ב': בחירת שותף ליעקב - .*

*ואז: .*

*ועל כן התשובה הסופית לסעיף זה: .*

***צירופים עם חזרות:***

***הבעיה – נתונים n עצמים שונים. בכמה אופנים ניתן לבחור מתוכם k עצמים עם חזרות ובלי חשיבות לסדר? התשובה – שקול למספר הפתרונות (במספרים טבעיים כולל 0) למשוואה . הפתרון מכונה והוא שווה ל- או ל-.***

***תרגיל:***

*לפנינו 8 כדורים אדומים זהים, 9 כדורים סגולים זהים ו-7 כדורים לבנים זהים.*

1. *בכמה דרכים ניתן לבחור מתוכם 9 כדורים ללא חשיבות לסדר?*
2. *בכמה דרכים ניתן לבחור 9 כדורים ללא חשיבות לסדר, אם כל צבע חייב להיבחר לפחות פעם אחת?*

***פתרון:***

1. *צריך לענות על השאלה: כמה פתרונות, במספרים טבעיים, יש למשוואה כאשר ו-. אם אין הגבלה על ועל אז הפתרון היה . אבל, מבין 55 הפתרונות הללו ההגבלה על ועל פוסלת חלק מהפתרונות:*
2. *.*
3. *.*
4. *.*
5. *.*

*לפיכך, התשובה הסופית לסעיף זה הינה .*

1. *בסעיף זה מוסיפים את ההגבלות הבאות: . לאחר הוספת ההגבלות החדשות, סה"כ ההגבלות הן: . נגדיר משתנה עזר לצורך הפתרון: . המשוואה, בשלב זה, תהפוך מהמקור שראינו בסעיף הקודם למשוואה הבאה: שהיא בעצם: עם ההגבלות כאשר, כמובן, מתקיים . מכיוון שבמקרה שלנו ההגבלות לא רלוונטיות (לא משפיעות על הפתרון) אז הרי שהפתרון הוא, לפי הנוסחא: .*

**שיעור 9 – 10.5.13**

***תרגיל:***

*מהו מספר פתרונות המשוואה במספרים טבעיים זוגיים?*

***פתרון:***

*אם לא היתה מגבלה על המספרים הטבעיים, הפתרון היה . נבצע החלפת משתנים: לכל , ונדרוש ש- (מקביל לדרישה ש- טבעי זוגי). כעת נקבל (\*) והשאלה הופכת להיות כמה פתרונות במספרים טבעיים יש למשוואה . במקרה החדש הפתרון הוא, כמובן, . גם למשוואה (\*) יש פתרונות במספרים טבעיים וגם למשוואה המקורים יש פתרונות במספרים טבעיים זוגיים.*

***תרגיל:***

*מהו מספר הפתרונות של המשוואה הנ"ל כאשר אי זוגי ואילו שאר המשתנים זוגיים?*

***פתרון:***

*מספר הפתרונות הוא 0. הסיבה לכך היא שכאשר מחברים מספר אי זוגי למספרים זוגיים התשובה תהא תמיד אי זוגית ולעולם לא 32.*

***תרגיל:***

*מהו מספר הפתרונות של המשוואה הנ"ל כאשר זוגי ואילו שאר המשתנים אי זוגיים?*

***פתרון:***

*נבצע את חילוף המשתנים הבא: ו-* לכל . אחרי החלופה נקבל את המשוואה . נחלק ב-2: וגם נעביר אגפים לקבלת משוואה "נקיה" . כעת, ניתן לחשב שמספר הפתרונות של המשוואה, במספרים טבעיים, הוא . זהו כמובן, גם מספר הפתרונות הנדרש עבור המשוואה המקורית.

***תרגיל:***

תהי .

1. כמה רלציות קיימות מעל A?
2. כמה יחסי סדר מלא קיימים מעל A?
3. כמה יחסים רפלקסיביים קיימים מעל A?
4. כמה יחסים סימטריים קיימים מעל A?
5. כמה יחסים אנטיסימטריים קיימים מעל A?
6. כמה יחסי שקילות שבכל אחד מהם בדיוק 3 מחלקות קיימים מעל A?
7. כמה יחסי שקילות יש מעל A (ללא הגבלה על כמות המחלקות)?

***פתרון:***

1. התשובה היא , הגודל של קבוצת החזקה.
2. התשובה היא . לסדר מלא יש דיאגרמת שרשרת ומספר היחסים האפשריים השונים הוא .
3. . 1 מסמל את בחירת כל איברי האלכסון הראשי (איברים מסוג ) ויש רק אפשרות אחת לבצע זאת. זו בחירת תת קבוצה כלשהי מבין 20 הזוגות הנותרים.
4. בשלב א': - בחירת תת קבוצה כלשהי מבין איברי האלכסון (אפשרי גם קבוצה ריקה).

בשלב ב': - בחירת תת קבוצה כלשהי מבין האיברים שמעל האלכסון.

בשלב ג': 1 – בחירת תת קבוצה כלשהי מתוך האיברים שמתחת לאלכסון (מכיוון שמדובר בקבוצה סימטרית הרי שהם נבחרים אוט' ברגע שנבחרים האיברים שמעל לאלכסון).

לפיכך, התשובה היא: .

1. בשלב א': - בחירת תת קבוצה כלשהי מבין איברי האלכסון (אפשרי גם קבוצה ריקה).

בשלב ב': מסתכלים על האיברים שמעל לאלכסון. ניתן לבחור אחד מהם ואז לא לבחור את ההופכי שלו, או שניתן לא לבחור אחד מהם אבל לבחור הופכי או שניתן לא לבחור אחד מהם וגם לא לבחור את ההופכי. כלומר, יש אפשרויות לשלב זה.

לפיכך הפתרון הוא: .

1. חלוקה ל-3 מחלקות בדיוק יכולה להיות אך ורק מהסוגים הבאים:
2. מחלקה אחת בת 3 איברים ועוד שתי מחלקות בת איבר אחד כ"א.
3. שתי מחלקות בנות 2 איברים כ"א ועוד מחלקה אחת בת איבר אחד.

התשובה תהיה הסכום של שתי האפשרויות לעיל.

נבדוק את מקרה i: יש לנו לבחור 3 איברים מקבוצה A בלי חשיבות לסדר ובלי חזרות. כלומר, .

נבדוק את מקרה ii: יש לנו בהתחלה אפשרויות לבחור קבוצה בת 2 איברים. לאחר מכן יש אפשרויות לבחור קבוצה בת 2 איברים מה-3 שנותרו. את המכפלה יש לחלק ב- היות ואין חשיבות לסדר הבחירה ולכן לחלק זה הפתרון הוא: .

הפתרון של סעיף זה הוא, כאמור, חיבור שני המקרים המתוארים בו:.

1. נמיין את החלוקות לפי גודל המחלקות ובמיון משני לפי מספר האיברים בכל מחלקה.
2. מחלקה אחת: יש 5 איברים במחלקה וזו יכולה להיות רק חלוקה אחת.
3. שתי מחלקות: יש שתי אפשרויות –
4. מחלקה אחת בת 4 איברים ועוד מחלקה בת איבר אחד.
5. מחלקה בת שלושה איברים ועוד מחלקה בת שני איברים.

ב-a יש 5 חלוקות אפשריות וב-b יש 10 חלוקות אפשריות . סה"כ 15 אפשרויות לחלוקה.

1. שלוש מחלקות: חושב בסעיף ו'.
2. ארבע מחלקות: מחלקה אחת בת שני איברים ועוד שלוש מחלקות בנות איבר אחד כ"א. יש לכך חלוקות אפשריות.
3. חמש מחלקות: רק אפשרות אחת בה כל איבר הוא מחלקה (זה בעצם יחס השקילות ).

סה"כ מספר יחסי השקילות מעל A הוא: .

**עיקרון ההכלה וההפרדה**

**נניח ש- הן קבוצות סופיות ורוצים לחשב את . כיצד מבצעים זאת?**

**כדי להראות נוסחא כללית נראה תחילה שני מקרים פרטיים ואז נכליל:**

**עבור נקבל**

**עבור נקבל**

**כעת ננסח את המקרה הכללי. נגדיר , , וכך הלאה עד . לאחר שהגדרנו את כל אלה נוכל לנסח נוסחא כללית לעיקרון זה: .**

**במידה ויש קבוצה אוניברסלית u המכילה את ואנו מעוניינים במשלים של האיחוד, אז נקבל .**

***תרגיל:***

מה מספר הדרכים לסדר את המחרוזת 11223344 כך שלא יהיו שתי ספרות צמודות שוות? כלומר, לא תופיע המחרוזת 11, לא 22, לא 33, לא 44.

***פתרון:***

נגדיר את ההגדרות הבאות –

1. - קבוצת הסידורים בהן 11 מופיע.
2. - קבוצת הסידורים בהן 22 מופיע.
3. - קבוצת הסידורים בהן 33 מופיע.
4. - קבוצת הסידורים בהן 44 מופיע.
5. - קבוצת כל הסידורים האפשריים ללא הגבלה.
6. - קבוצת הסידורים ה"לא חוקיים" (לא עונים לתנאי השאלה).

אנו מחפשים כעת, אם כן, את .

נחשב תחילה את – .

נחשב את – זה בעצם מספר האפשרויות לסדר את 11 ואת 22 ואת 33 ואת 44 בשורה. התוצאה היא, כמובן, .

נחשב את - כדי לחשב את "נדביק" את שני ה-1 ונסדר אותם בשורה עם 6 הספרות הנותרות. התשובה היא . נחשב באותו אופן גם את , וגם ונקבל ש-.

נחשב את - כדי לחשב את "נדביק" את 11 עם 22 ונסדר בשורה עם הספרות האחרות: . כלומר, .

נחשב את - כדי לחשב את "נדביק" את 11 עם 22 ועם 33 ונסדר בשורה עם הספרות האחרות ואז נקבל . ולכן, .

לאחר שחישבנו את כל האפשרויות הנדרשות, לפי הנוסחא הכללית לעיל, התשובה הסופית היא: .

***תרגיל:***

חשב את מספר הפתרונות שיש למשוואה תחת המגבלות הבאות:

***פתרון:***

נציב ונקבל את המשוואה החלופית (\*) שמספר פתרונותיה תחת המגבלות ב', ג' ו-ד' לעיל שווה למספר פתרונותיה של המשוואה המקורית תחת כל המגבלות לעיל.

נגדיר את ההגדרות הבאות:

1. היא קבוצת הפתרונות מתוך u שלא מקיימים את הנדרש.

הקבוצה שאת גודלה אנו מחפשים היא הקבוצה . אבל, בכדי לחשב את גודל הקבוצה עלינו לחשב תחילה את .

חישוב : נציב ב-(\*) ונקבל - משוואה חלופית שמספר פתרונותיה הטבעיים, ללא אילוצים, הוא . ומכאן, .

חישוב : נציב ב-(\*) ונקבל - משוואה חלופית שמספר פתרונותיה הטבעיים, ללא אילוצים, הוא . ומכאן, .

חישוב : נציב ב-(\*) ונקבל - משוואה חלופית שמספר פתרונותיה הטבעיים, ללא אילוצים, הוא . ומכאן, .

חישוב : נציב ב-(\*) וגם ונקבל - משוואה חלופית שמספר פתרונותיה הטבעיים, ללא אילוצים, הוא . ומכאן, .

חישוב : נציב ב-(\*) וגם ונקבל - משוואה חלופית שמספר פתרונותיה הטבעיים, ללא אילוצים, הוא . ומכאן, .

חישוב : נציב ב-(\*) וגם ונקבל - משוואה חלופית שמספר פתרונותיה הטבעיים, ללא אילוצים, הוא . ומכאן, .

חישוב : נציב ב-(\*) וגם וגם ונקבל - משוואה חלופית שמספר פתרונותיה הטבעיים, ללא אילוצים, הוא . ומכאן, .

כעת, התשובה היא: .

**שיעור 10 – 17.5.13**

***תרגיל:***

*הוכח בעזרת עיקרון ההכלה וההפרדה כי מספר הפונקציות של קבוצה A בת n איברים על קבוצה B בת k איברים היא: .*

***פתרון:***

*נסמן . מספר הפונקציות של A ל-B ללא כל הגבלה הוא . תהי u קבותת כל הפונקציות של A ל-B. במקרה זה . נגדיר קבוצות באופן הבא: קבוצת כל הפונקציות ב-u כך ש- לא מופיע בתמונתן.*

*מכאן, זוהי קבוצת כל הפונקציות של A ל-B שאינן על. אנחנו מחפשים את .*

*נשים לב שלכל מתקיים . היא בעצם קבוצת כל הפונקציות של A לקבוצה .*

*נתבונן כעת בחיתוך כאשר . הגודל של הוא . הסיבה לכך היא ש- היא קבוצת כל הפונקציות מ-A ל-.*

*באופן אנלוגי לחלוטין, החיתוך של l קבוצות מתוך יהיה בעוצמה של .*

*כעת, נחשב את :*

*ובאופן כללי, לכל מתקיים .*

*ועל כן, לפי נוסחת ההכלה וההפרדה:*

***הערה:*** *כל פונקציה מ-A על B מחלקת את A ל-k מחלקות בדיוק. המחלקות הן כל תתי הקבוצות של A שאיבריהן מותאמים על ידי הפונקציה לאותו איבר של B. ברור שלכל חלוקה של A ל-k מחלקות יש פונקציות שמשרות אותה. מכאן, מספר החלוקות של A לבדיוק k מחלקות היא . לפיכך, מספר החלוקות האפשרי של A הוא הסכום . הגודל הזה שווה למספר יחסי השקילות מעל A.*

***תרגיל:***

*4 משפחות הקימו גן ילדים. לקראת פתיחת הגן יש צורך לקנות צעצועים, לקנות מזרנים, לנקות את החצר, לתקן את התריסים, לתקן את הכיור, לצבוע את השער ולנהל את חשבון הבנק של הגן.*

1. *בכמה דרכים ניתן לחלק את 8 המשימות באופן שכל משפחה תקבל לפחות משימה אחת, ולא מחלקים משימות בין מספר משפחות?*
2. *לאחר מחשבה הוחלט שכל משימה תבוצע בשיתוף על ידי שתי משפחות. בכמה דרכים ניתן לחלק את את המשימות אם כל משפחה צריכה לקחת חלק במשימה אחת לפחות?*

***פתרון:***

1. *השאלה היא, בעצם, כמה פונקציות יש ממספר המטלות (8) על מספר הזוגות האפשריים (6). התשובה היא .*
2. *נגדיר את u להיות אוסף כל הקבוצות של 8 המשימות לתוך קבוצת 6 זוגות המשפחות. ולכן, .*

*נגדיר גם קבוצת כל הפונקציות מתוך u כך שמשפחה i לא מופיעה כלל באף זוג המתקבל בתמונה כאשר .*

*נגדיר כאוסף כל הפונקציות מתוך u כך שיש משפחה שלא מופיעה באף זוג (ואז לא מבצעת אף משימה). אנו מחפשים את .*

*יש , כלומר 3, זוגות של משפחות שלא מכילים את משפחה מספר 1. לכן, הגודל של הוא מספר המשימות ל-3 הזוגות שיש. במילים אחרות . אבל מובן גם שמתקיים ולכן .*

*נחשב כעת את . בחיתוך נותר רק זוג אחד של משפחות אפשרי לביצוע המשימות ולכן . אבל כל החיתוכים של 2 משפחות שווים ביניהם ולכן .*

*כעת, בחישוב ו- נשים לב ששניהם שווים ל-0. מפני שבחיתוך של 3 משפחות ללא משימות לא ניתן לייצר מהנותרים אף זוג לביצוע משימות כנדרש. אותו כנ"ל לגבי .*

*לפיכך, ניתן לחשב כעת את התשובה הסופית: .*

***תרגיל:***

*תהי A קבוצה של 100 מספרים שלמים כלשבם. הוכח שקיימת קבוצה חלקית לא ריקה של A שסכום איבריה מתחלק ב-100 ללא שארית.*

***פתרון:***

*נסמן . יש, כמובן, תת קבוצות לא ריקות של A. נתבונן ב-100 קבוצות "נבחרות":*

*וכך הלאה עד*

*ייתכן שמבין 100 הקבוצות עד קיימת שסכום איבריה מתחלק ב-100 ללא שארית. במקרה כזה אין מה להוכיח. אם זה לא קורה, אז נוצר מצב בו הן כולן בעלות סכומים שהשאריות של כל אחד מהן בחלוקה ל-100 נעות בין 1 ל-99.*

*מכיוון שיש 100 סכומים שונים אבל רק 99 שאריות אז לפי עיקרון שובך היונים יש לפחות שני סכומים שונים ו- כאשר , העלי אותה שארית k בחלוקה ל-100. המשמעות היא ש- ובנסוף מתקיים גם ש- כאשר .*

*נוכל להפחית מהסכום הגדול את הסכום הקטן: המתחלק ב-100 ללא שארית.*

*כלומר, נוכל להגדיר קבוצה , שאינה ריקה, והיא תת קבוצה ל-A, שסכום איבריה מתחלקים ב-100 ללא שארית.*

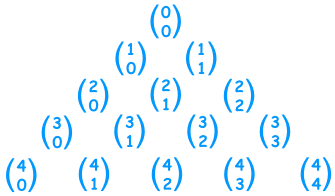
***בינום ניוטון:***

***ומקרה פרטי:***

**תכונות משולש פסקל:**

**ישנו משולש שווה שוקיים אינסופי. הערכים של השוקיים תמיד שווים ל-1. הערכים של כל תרגיל בתוך המשולש שווים תמיד לסכום האיברים ביניהם הם נמצאים.**

**לכן, וגם אם נחבר .**



**וממשיך הלאה עד אינסוף...**

***תרגיל:***

*חשב את הסכום . תן תשובה מספרית ללא חישוב כל האיברים בסכום.*

***פתרון:***

*על פי נוסחא 6 בחוברת הקטנה: .*

*ואז - .*

*סכום איברי השורה ה-10 במשולש פסקל*

***תרגיל:***

*חשב את הסכום*

***פתרון:***

**שיעור 11 – 24.5.13**

***תרגיל:***

*כמה סדרות באורך n המורכבות מהמספרים 0,1,2 אפשר לכתוב באופן שלא יופיע הרצף 11?*

***פתרון:***

*עבור n=1 מספר הסדרות הוא 3.*

*עבור n=0 יש רק סדרה אחת, הסדרה הריקה.*

*עבור n=2 מספר הסדרות הוא (מורידים את הסדרה 11)*

*עבור n=3 מספר הסדרות הוא (מורידים את הסדרות 011,111,211,112,110)*

*וכן הלאה...*

*נסמן ב- את מספר הסדרות החוקיות באורך n. איך בונים סדרה חוקית באורך n?*

*אם נתחיל ב-0 אז לאחר מכן כל סדרה חוקית באורך תייצר סדרה חוקית באורך n.*

*אם נתחיל ב-2 אז לאחר מכן כל סדרה חוקית באורך תייצר סדרה חוקית באורך n.*

*לשני אלה יש אפשרויות.*

*אם נתחיל ב-1, נצטרך לחלק ל-2 מקרים:*

*אם נתחיל ב-10 אז לאחר מכן כל סדרה חוקית באורך תייצר סדרה חוקית באורך n.*

*אם נתחיל ב-12 אז לאחר מכן כל סדרה חוקית באורך תייצר סדרה חוקית באורך n.*

*לשני אלה יש אפשרויות.*

*כעת, לפי עקרון החיבור, נקבל ש-*

*כלומר, לכל*

*וידוע ש-*

*וידוע ש-*

*יש לנו כאן מערכת רקורסיבית. כלומר, יש לנו נוסחת רקורסיה ותנאי התחלה מספיקים.*

*נחשב את לפי נוסחת הרקורסיה:*

***חישוב נוסחא ישירה לנוסחת הרקורסיה מהצורה כאשר קבועים ו-. במילים אחרות, נוסחאות רקורסיה לינאריות הומוגניות ממעלה 2. שיטת הפתרון: בונים את המשוואה האופיינית של נוסחת הרקורסיה .***

*במקרה לעיל זו תהיה המשוואה . הפתרונות של משוואה זו הם . מכיוון שבמקרה שלנו ו- שונים זה מזה אז נקבל את הנוסחא הבאה ל-:*

*A ו-B הם קבועים שניתן למצוא בעזרת תנאי ההתחלה.*

*מהפיתוח של שתי משוואות בשני נעלמים נקבל ש- ו-.*

*ומכאן, הנוסחא המבוקשת עבור היא .*

***הערה: אם אז כותבים במקום את .***

*לדוגמא, נוסחת רקורסיה מהצורה הבאה . לנוסחא זו, עם תנאי פתיחה , המשוואה האופיינית היא . הפתרון היחיד שלה הוא 1 ולכן נקבל ולאחר שנציב בתנאי ההתחלה נקבל ש- ו-.*

*אז קיבלנו בדוגמא את הסדרה הקבועה .*

***תרגיל:***

*כמה סדרות באורך n שבנויות מ-0,1,2 ניתן להרכיב כך שלא מופיע 21 ולא מופיע 12?*

***פתרון:***

*אם נתחיל ב-0 אז לאחר מכן כל סדרה חוקית באורך תייצר סדרה חוקית באורך n.*

*אם נתחיל ב-1, אז יש שני מקרים אפשריים:*

*אם נתחיל ב-10 אז לאחר מכן כל סדרה חוקית באורך תייצר סדרה חוקית באורך n.*

*אם נתיל ב-11 אז גם צריך להפריד לשני מקרים ויש לנו כאן לולאה אינסופית.*

*לפיכך, נגדיר מספר הסדרות החוקיות באורך n.*

*נגדיר מספר הסדרות החוקיות באורך n המתחילות ב-0.*

*נגדיר מספר הסדרות החוקיות באורך n המתחילות ב-1.*

*נגדיר מספר הסדרות החוקיות באורך n המתחילות ב-2.*

*אבל - מספר הסדרות החוקיות באורך n המתחילות ב-0.*

*ומכאן, ובאותו אופן גם .*

*מכאן, .*

*החלק בצהוב הוא ואילו החלק בתכלת הוא .*

*תנאי הפתיחה שלנו הם ו-.*

*מכאן, להמשיך לפתור עצמאית...*

***תרגיל:***

*נתבונן במספרים 0,1,2,3,4. כמה סדרות באורך n ניתן לבנות באופן שיתקבל בסדרה מספר אי זוגי של 0? לדוגמא: הסדרה 12340 חוקית, כמוגם הסדרה 10030 בעוד שהסדרה 10230 לא חוקית וכך גם הסדרה 12334.*

***פתרון:***

*אם נתחיל בכל ספרה למעט 0, הרי שנצטרך לשרשר סדרה חוקית באורך איברים.*

*אם נתחיל ב-0 אז נצטרך לשרשר סדרה לא חוקית ואז מספר האפשרויות יהיה . כאשר מסמל את מספר האפשרויות הכללי לשרשור סדרה באורך איברים ואילו מסמל את מספר האפשרויות החוקיות לבצע זאת.*

*במקרה זה נקבל כי . זו נוסחת רקורסיה ממעלה 1 אבל היא אינה לינארית הומוגנית.*

*נזכור ש- כי 0 הוא זוגי ולכן זו סדרה לא חוקית.*

*נגדיר נוסחת רקורסיה עבור - הסדרות הלא חוקיות באורך n.*

*נקבל כעת, ו-.*

*קיבלנו בינתיים:*

*ומהחיסור:*

*ומכאן, וגם הן סדרות הנדסיות בעלות מנה קבועה – 3. מכיוון ש- והמנה היא 3 הרי שנקבל . כלומר, .*

*וידוע ש-*

*מהצבה של 2 משוואות ב-2 נעלמים נקבל ש- ו-.*

***"פונקציה יוצרת" זה ביטוי מהצורה . זו בעצם דרך אחרת לייצג את הסדרה .***

***חיבור 2 פונקציות יוצרות זה פשוט חיבור של המקדמים. כפל 2 פונקציות יוצרות כבר קצת יותר מורכב. נגדיר . נרצה להגדיר את . לפיכך:***

***.***

***כאשר c מייצג את מכפלות המקדמים לאותו משתנה. למשל: , וגם* . נרצה להגדיר את הנוסחא למקדם המכפלה של פומקציות יוצרות באופן כללי: .**

***תרגיל:***

חשב את המקדם של בפיתוח הפונקציה .

***פתרון:***

*נגדיר . המקדם של בפונקציה היוצרת הוא המקדם של בפונקציה היוצרת . לכן, נצטרך למצוא כעת את המקדם של בפונקציה היוצרת . נגדיר ואז . כעת, צריך למצוא את המקדם של בפונקציה החדשה. קיבלנו טור הנדסי סופי. לכן, נשתמש בסכום טור הנדסי סופי: .*

*כאשר חישוב באמצעות הבינום של ניוטון ואילו מתוך נוסחא 3 בממ"ן 15.*

*נסמן*  ונסמן גם *.*

*ואז .*

*נסמן את מקדמי ב- ואת מקדמי ב-. לפיכך מקדמי יהיו . אנחנו מעוניינים למצוא את .*

*לפי נוסחת כפל פונקציות יוצרות נקבל .*

*. מהנוסחא הזאת רואים שכל ה- המשתתפים בחישוב , כמעט כולם 0, למעט . ואז, , , .*

*. מנוסחא 3 בממ"ן 15 מקבלים* .

ואז: , , . ונציב חזרה כדי למצוא את : .

***תרגיל:***

כמה פתרונות יש, במספרים טבעיים, למשוואה כך שכל אחד מה- חייב לקבל ערכים מתוך הקבוצה ?

***פתרון:***

עבור כל משתנה בונים םונקציה יוצרת שכל מקדמיה הם 0 ו-1. המקדמים 1 הם רק על החזקות של הערכים שהמשתנה יכול לקבל. עבור בונים את הפונקציה היוצרת . מכיוון שכל המשתנים רשאים לקבל את אותם ערכים הרי שעבור עד נבנה את אותה פונקציה בדיוק. הפתרון של הבעיה שלנו הוא המקדם של במכפלת הפונקציה שבנינו (ראה פתרון תרגיל קודם).

***תרגיל:***

כמה פתרונות יש למשוואה כאשר , , , ?

***פתרון:***

צריך למצוא את המקדם של של הפונקציה הבאה –

*כאשר נגדיר כ- ואת כ-.*

**שיעור 12 – 31.5.13**

***תרגיל:***

*נתבונן בזהות הבאה:*

*חשב את המקדם ב-2 דרכים:*

1. *דרך ישירה*
2. *באמצעות מכפלת פונקציות יוצרות*

*קבל זהות קומבינטורית מהשוואת 2 התוצאות.*

***פתרון:***

*נגדיר: , , .*

*דרך ישירה: לפי נוסחא 3 בסוף ממ"ן 15 נקבל ש-. אבל . קל גם לראות ש- ומכיוון ש-אז . מכאן, שלכל k מתקיים , כלומר, המקדם של ב-הוא , כלומר . קיבלנו .*

*מכפלת פונקציות יוצרות: נשתמש בכך ש- ולכן לפי נוסחא 2 בסוף ממ"ן 15 נקבל . נשים לב לכך ש-ולכן . מכאן, המקדם של ב-, כלומר , שווה ל-. כלומר, לפי מה שהראנו בנוסחא הישירה, .*

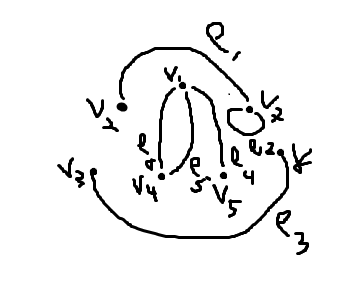
*מכאן: . כלומר, הזהות הקומבינטורית שהתקבלה היא: .*

*נבדוק את נכונות הנוסחא עבור :*

*המחובר הראשון הוא 5, השני הוא 8-, השלישי הוא 9, הרביעי הוא 8- והחמישי הוא 5. הסיכום של כולם שווה ל-3 כנדרש.*

***גרף G מורכב מקבוצה של צמתים V וקבוצה של קשתות E. בד"כ הצמתים מתוייגים ע"י אותיות וכל קשת E חייבת לחבר בין שני צמתים או בין צומת לעצמו (ואז היא נקראת לולאה). גם לקשתות נותנם בד"כ שמות: .***

***לדוגמא:***

**

***דרגת הצומת, כמספר הקשתות העוברות דרכו: וכן הלאה.***

***סכום הדרגות הוא 12 וזה בדיוק . זה לא מקרי. בכל גרף G מתקבל .***

***מסלול בגרף: קבוצה של קשתות סדורות כך שכל קשת יוצאת מצומת שאליה נכנסת קודמתה ואף קשת אינה חוזרת פעמיים.***

***דוגמאות למסלולים בגרף שבעמוד הקודם:***

***הוא מסלול מ- ל-***

***הוא מסלול מ- ל-***

***הוא מסלול מ- ל- ואינו מסלול פשוט מכיוון שעובר פעמיים ב-***

***הוא מסלול מ- ל-***

***הוא מסלול מ- ל- ואינו מסלול פשוט מכיוון שעובר פעמיים ב-***

***הוא מסלול מ- ללעצמו, הנקרא גם מעגל, ואינו מסלול פשוט מכיוון שעובר פעמיים ב-***

***המרחק בין שני צמתים הוא אורך המסלול הקצר ביותר ביניהם. כאשר אין קשר בין שני צמתים אז אורך המסלול ביניהם הוא אינסופי.***

***גרף שאינו קשיר הוא גרף שיש בו צמתים שאינם קשורים ביניהם (כמו הצמתים ו- בגרף שבעמוד הקודם).***

***תרגיל:***

*נתאר לעצמנו גרף על 8 צמתים שדרגותיהם 1,2,2,3,3,3,6,7*

1. *יש גרף פשוט וקשיר כזה.*
2. *יש גרף קשיר כזה אבל אינו פשוט.*
3. *יש גרף פשוט כזה אבל אינו קשיר.*
4. *יש גרף כזה אבל הוא חייב להיות לא פשוט ולא קשיר.*
5. *לא קיים גרף כזה.*

***פתרון:***

*התשובה היא ה – לא קיים גרף כזה, וזאת מכיוון שיש לנו מספר אי זוגי של דרגות.*

***תרגיל:***

*נתאר לעצמנו גרף על 6 צמתים שדרגותיהם 0,2,2,4,4,4*

1. *יש גרף פשוט וקשיר כזה.*
2. *יש גרף קשיר כזה אבל הוא אינו פשוט.*
3. *יש גרף פשוט כזה אבל הוא אינו קשיר.*
4. *יש גרף כזה אבל הוא חייב להיות לא פשוט ולא קשיר.*
5. *לא קיים גרף כזה.*

***פתרון:***

*אין גרף קשיר כזה כי לגרף קשיר אין צומת מדרגה 0.*

*אין גרף פשוט כזה: נניח בשלילה שיש גרף פשוט כזה. נסמן את צמתיו ב- כאשר . מכיוון שהגרף פשוט והדרגה של היא 4 אז מחובר ל-4 צמתים השונים ממנו ומ-. אותו כנ"ל לגבי ו-. יוצא שכל הצמתים מחוברים ל- ול- ואז יש להם 3 קשתות, בסתירה לנתון שיש להם רק 2.*

*ולכן התשובה היא ד.*

***תרגיל:***

*גרף G הוא גרף על 50 צמתים. מתוכם: 20 צמתים בעלי דרגה 3 ו-30 צמתים בעלי דרגה 4.*

*מספר הקשתות ב-G הוא:*

1. *49*
2. *50*
3. *90*
4. *180*
5. *לא ניתן לדעת.*

***פתרון:***

*סכום הדרגות הוא 180 שזה בדיוק כפול ממספר הקשתות ולכן התשובה היא ג – 90.*

***תרגיל:***

*יהי G גרף פשוט על n צמתים ובו לכל 2 צמתים שונים u ו-v שאינם שכנים (כלומר, שלא מחברת ביניהם קשת) מתקיים . הוכח ש-G קשיר.*

***פתרון:***

*צריך להוכיח שעבור u ו-v שאינם שכנים ניתן למצוא מסלול המחבר ביניהם. נגדיר את כקבוצת השכנים של u ואת כקבוצת השכנים של v.*

*מכיוון שהגרף פשוט אז בהכרח מתקיים וגם . ניתן לומר כי מתקיים גם היות ו-u ו-v אינם שכנים בינם לבין עצמם ולכן אינם שייכים לקבוצת השכנים של עצמם. כלומר* .

לפי עקרון ההכלה וההפרדה מתקיים *.*

*ואז מתקיים אי השוויון הבא: ומכאן מתקיים בהכרח גם . ולכן . מכאן ניתן להסיק שקיים w שהוא שכן משותף ל-u ול-v.*

*יש קשת מ-u ל-w וגם מ-v ל-w ולכן יש מסלול v-w-u באורך 2 מ-u ל-v.*

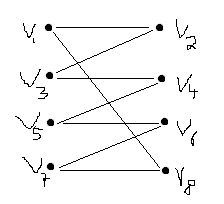
*מסקנה: הגרף G קשיר.*

***גרפים מיוחדים:***

1. ***- זהו גרף פשוט בעל n צמתים שכל שניים שונים מהם מחוברים בקשת. זהו למעשה הגרף השלם על n צמתים. ב- יש קשתות ולפיכך סכום הדרגות ב- הוא .***
2. ***- זהו מעגל פשוט על n צמתים (נציין שמעגל לא פשוט הוא מעגל שחוזר על נקודה מסוימת, למעט נקודת הפתיחה, יותר מפעם אחת – כדוגמת הנקודה המרכזית בספרה 8 – אם נדמה את הספרה למעגל).***
3. ***גרף דו צדדי זהו גרף שאפשר לחלק את קבוצת הצמתים שלו לשתי קבוצות זרות A ו-B, לא ריקות, כך שכל הקשתות בגרף, קצה אחד שלהן ב-A וקצה שני שלהן ב-B.***
4. ***הוא גרף דו צדדי פשוט עם pצמתים בצד הראשון ו-q צמתים בצד השני כך שבין כל צומת בצד הראשון לכל צומת בצד השני יש קשת. גרף זה גם נקרא הגרף הדו-צדדי השלם על p ו-q***
5. ***המשלים של גרף פשוט על n צמתים הוא גרף פשוט על n צמתים שהקשתות בו הן כל הקשתות בגרף השלם שלא מופיעות ב-G. הסימון הוא .***
6. ***יער – גרף ללא מעגלים.***
7. ***עץ – יער קשיר.***

***כל יער הוא איחוד של עצים זרים וכל עץ מהווה רכיב קשירות של היער. מספר הקשתות ביער הוא כמספר הצמתים פחות מספר רכיבי הקשירות.***

*דוגמא לגרף מעגל דו צדדי:*

**

***תרגיל:***

*גרף G הוא גרף דו צדדי. סכום דרגות הצמתים השייכים לצד אחד של הגרף הוא 8 ואילו סכום הדרגות של הצמתים בצד השני של הגרף הוא 6.*

1. *יש גרף דו צדדי כזה פשוט וקשיר.*
2. *יש גרף דו צדדי כזה אבל הוא לא פשוט.*
3. *יש גרף דו צדדי כזה אבל הוא לא קשיר.*
4. *לא ייתכן גרף דו צדדי כזה.*

***פתרון:***

*בגרף דו צדדי חייב להתקיים שסכום הדרגות בצד אחד יהיה שווה לסכום הדרגות בצד השני. לפיכך, התשובה היא – ד.*

***תרגיל:***

*הגרף המשלים של הגרף הדו צדדי המלא הוא:*

1. *איחוד זר של עם*
2. *גרף ריק (ללא קשתות) על 8 צמתים*
3. *אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה*

***פתרון:***

*מכיוון שעלינו למחוק את הקשרים מהגרף הדו צדדי המלא ולצייר את כל הקשרים הנוספים, התשובה היא ג. כלומר, כל הקשרים שלא מקשרים בין קבוצה A ל-B ולכן מדובר באיחוד זר כמצוין בתשובה ג.*

***תרגיל:***

*גרף G הוא יער על 14 צמתים ובו בדיוק 4 רכיבי קשירות. מספר הקשתות ב-G הוא:*

1. *10*
2. *14*
3. *13*
4. *לא ניתן לקבוע*

***פתרון:***

*מכיוון שמספר הקשתות הוא מספר הצמתים פחות מספר רכיבי הקשירות אזי הפתרון הוא א – 10.*

***נניח ש- היא קבוצה של צמתים מתוייגים. כמה עצים שונים ניתן לבנות מצמתים אלה?***

***אם אז ניתן לבנות עץ בודד.***

***אם אז ניתן לבנות עץ בודד.***

***אם אז ניתן לבנות 3 עצים.***

***השערת קיילי: יש עצים שונים.***

***הוכח על ידי פרופר. הוא בנה קבוצה חח"ע ועל מקבוצת העצים לקבוצת הסדרות באורך הבנויות על . מכיוון שמספר הסדרות ידוע () – אז הפונקציה של פרופר מוכיחה שגם מספר העצים הוא כזה.***

**שיעור 13 – 7.6.13**

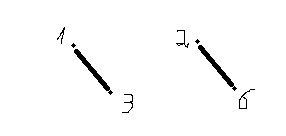
***נגדיר עץ לדוגמא: . נגדיר, בנוסף, מחרוזת/סדרה לדוגמא באורך n-2: 3,6,10,7,10,5,5,9.***

***כדי ליצור עץ בודקים מי האיבר הראשון בקבוצה שאינו מופיע בסדרה ומתאימים לו בקשת את האיבר הראשון בסדרה:***

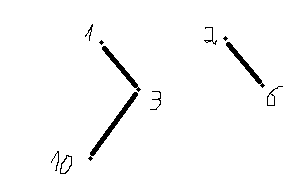
**

***ממקמים את 1 מהקבוצה ואת 3 מהמחרוזת/סדרה.***

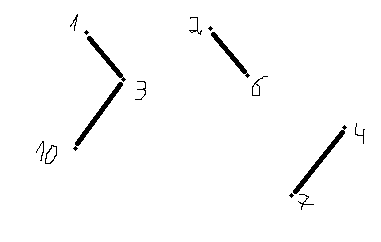
***ממשיכים הלאה. בודקים את האיבר הבא בקבוצה עם מה שנשאר מהמחרוזת/סדרה. ובמקרה שלנו:***

**

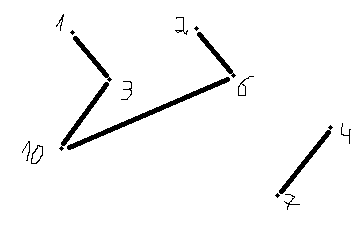
***האיבר הבא בקבוצה הוא 3, ואינו מופיע במה שנשאר מהמחרוזת/סדרה:***

**

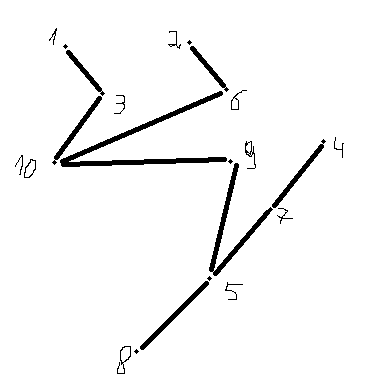
***ממשיכים לאיבר הבא בקבוצה ובמחרוזת/סדרה:***

**

***כעת, האיבר הבא בקבוצה הוא 5, אבל עדיין מופיע בסדרה ולכן מדלגים עליו, זמנית, לאיבר הבא – 6:***

**

***וכך, ממשיכים הלאה עד לסיום בו מחברים בקשת את שני האיברים הנותרים אחרונים בקבוצה:***

**

***לעץ שמתאים לסדרה/מחרוזת יש תכונה אחת בולטת: הדרגה של כל צומת בעץ גדולה ב-1 ממספר המופעים של הצומת בסדרה. לפיכך, עלים של העץ כלל אינם מופיעים בסדרה.***

***תרגיל:***

*נניח G עץ (מתוייג) על 60 צמתים. נתון שהדרגה המקסימלית של צומת ב-G היא 3 ושיש בדיוק 10 צמתים בעלי דרגה כזאת. כמה עלים יש ב-G?*

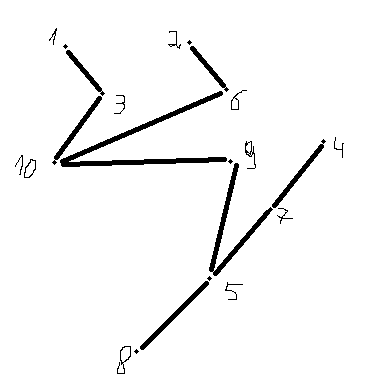
***פתרון:***

*הפתרון הוא בעזרת סדרת Prufer של G. אורכה של הסדרה הוא 58. מתוך 58 המקומות, הצמתים שדרגתם היא 3 תופסים 20 מקומות (כל צומת כזה תופס 2 מקומות). 38 המקומות הנותרים נתפסים ע"י צמתים שדרגתם 2, וכל אחד כזה תופס מקום אחד. כלומר, יש 38 צמתים שדרגתם 2. ולכן, צמתים שדרגתם 1. כלומר יש 12 עלים.*

***פתרון נוסף:***

*יש 59 קשתות ב-G ולכן סכום הדרגות ב-G הוא . מכאן, מתקיים כלומר, ואז יוצא ש-.*

*נתון העץ:*

**

*נבנה ממנו את הסדרה בחזרה:*

*נתחיל מ-1 (העלה הכי קטן). הוא מחובר ל-3. לכן, האיבר הראשון בסדרה הוא 3. נמחק את הקשר בין 1 ל-3 ונמשיך הלאה לעלה הקטן ביותר. העלה הבא הקטן ביותר הוא 2, המחובר ל-6. לכן האיבר הבא בסדרה יהיה 6. מוחקים את הקשת הזאת וממשיכים לעלה הבא הקטן ביותר. עלה זה הוא 3 והוא מחובר ל-10. לכן, האיבר הבא בסדרה יהיה 10. מוחקים גם את הקשת הזאת וממשיכים לעלה הקטן ביותר הבא, 4. עלה זה מחובר ל-7 ולכן האיבר הבא בסדרה הוא 7. ממשיכים כך הלאה עד שמגיעים לקשת האחרונה (עם 2 צמתים) אותם לא מכניסים לסדרה.*

***גרפים מימדיים***

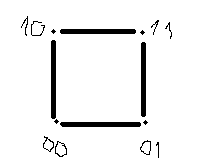
*ראינו קודם את . כעת נראה את - קוביה n מימדית.*

*הצמתים של הם הסדרות הבינאריות באורך n. לפיכך, ב- יש צמתים. בין 2 צמתים מחברת קשת אם ורק אם ההבדל בין 2 הסדרות הוא ברכיב אחד בלבד.*

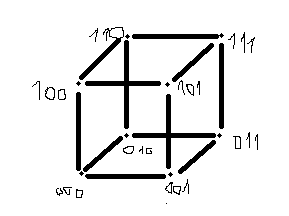
***דוגמאות:***

**

*איזומורפי ל-.*

**

*איזומורפי ל-.*

**

*.*

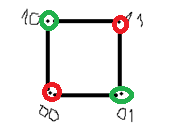
***טענה:*** *הוא דו צדדי.*

***הוכחה:***

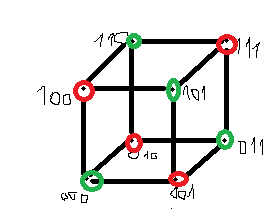
*נחלק את ל-2 קבוצות.*

**

*נחלק את ל-2 קבוצות.*

**

*נחלק את ל-2 קבוצות.*

**

*הוכחה על :*

*נסמן ב-A את כל צמתי (סדרות בינאריות באורך n) אשר סכום רכיביהם זוגי, וב-B את כל צמתי שסכום רכיביהם אי זוגי. כמובן ש- מהווים את כל צמתי ו- וגם .*

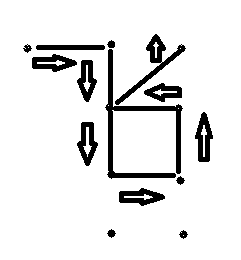
*בין כל 2 צמתים ב-A לא יכולה להיות קשת כי כאשר סכום רכיבי סדרה אחת הוא זוגי וגם סכום רכיבי סדרה שניה הוא זוגי אז לא יכול להיות ביניהם הבדל של רכיב אחד בלבד. באופן אנלוגי גם בין כל רכיב ב-B לא יכולה להיות קשת ולכן החלוקה מוכיחה ש- דו צדדי.*

***מסלול אוילר בגרף G***

*זהו מסלול שעובר דרך כל הקשתות בגרף. מסלול אוילר סגור נקרא מעגל אוילר. גרף שיש בו מעגל אוילר נקרא גרף אולרי.*

1. ***בגרף קשיר יש מעגל אוילר אם ורק ם כל הדרגות זוגיות.***
2. ***בגרף קשיר יש מסלול אוילר שאיננו מעגל אם ורק אם כל הדרגות זוגיות פרט ל-2 דרגות בדיוק.***

***דוגמא למסלול אוילר:***

**

*לפי החיצים ניתן לראות כי יש בגרף מסלול אוילר. אם היינו מורידים את שתי הנקודות בתחתית הגרף היינו מקבלים גרף אולרי, שיש בו מעגל אוילר.*

***מסלול המילטון בגרף G***

*זהו מסלול שעובר דרך כל צומת בגרף בדיוק פעם אחת (למעט מעגל המילטון שגם הוא נחשב למסלול המילטון. מעגל המילטון הוא מעגל פשוט שעובר דרך כל צומת פעם אחת (למעט צומת ההתחלה, שהוא גם צומת הסיום).*

1. ***אם בגרף יש מעגל המילטון אז או שהגרף הוא או שהוא מכיל .***
2. ***גרף שיש בו מעגל המילטון נקרא גרף המילטוני (וברור שבכל גרף המילטוני יש גם מסלול המילטון שאיננו מעגל).***

***התנאי של O. Ore:*** *נניח ש-G פשוט על n צמתים ומתקיים בו התנאי . אם לכל שני צמתים u ו-v שאינם שכנים מתקיים אז G המילטוני.*

***המסקנה של Dirac:*** *ש-G פשוט על n צמתים ומתקיים בו התנאי . אם כל צומת v מקיים אז G המילטוני.*

*הן התנאי והן המסקנה לעיל מהווים תנאים מספיקים אך לא הכרחיים להוכחת G המילטוני.*

*אינו המילטוני.*

*מקיים את משפט Dirac ולכן המילטוני.*

*לא מקיים את משפט Dirac ולא את משפט Ore ובכל זאת הוא המילטוני:*

*באופן כללי ניתן להראות ש- המילטוני על ידי שימוש ב"קוד Grey" (לעיל, תיאור המעבר בין הצמתים לכדי סגירת מעגל).*

***תרגיל:***

*יהי G הגרף הבא: הצמתים ב-G הן כל תת הקבוצות בגודל 3 של . בין שני צמתים שונים עוברת קשת אם ורק אם . הוכח כי G המילטוני ואוילרי.*

***פתרון:***

*כמובן ש-G פשוט. הדרגה של כל צומת ב-G הוא מספר תת הקבוצות בנות 3 איברים בעלי חיתוך בעוצמה 1 עם הצומת הנתון. כלומר, אם הצומת הוא אז יש לו , זוהי בעצם, בחירת החיתוך. לכן כל הדרגות ב-G שוות ל-18.*

*הגרף פשוט, מספר צמתיו הוא גדול מ-3 וכל הדרגות גדולות או שוות ל-. הגרף עונה על תנאי מסקנת Dirac ולכן המילטוני.*

*מכיוון שהגרף הוא המילטוני אז הגרף בהכרח קשיר. מאחר והגרף קשיר וכל דרגותיו זוגיות הרי שנובע מכך שהגרף הוא אוילרי.*

***תרגיל:***

*בהמשך לגרף בתרגיל הקודם, כמה קשתות יש בגרף?*

***פתרון:***

*סכום הדרגות הוא ולכן מספר הקשתות הוא מחצית ממספר הדרות ושווה ל-315.*

***תרגיל:***

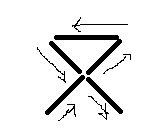
*טענה 1: מסלול אוילר עובר דרך כל קשת פעם אחת. הוא יכול לעבור כמה פעמים דרך אותו צומת.*

*טענה 2: מסלול המילטון עובר דרך כל צומת פעם אחת. הוא יכול לעבור כמה פעמים דרך אותה קשת.*

1. *רק טענה 1 נכונה.*
2. *רק טענה 2 נכונה.*
3. *הוא אינו אוילרי אבל יש בו מסלול אוילר שאיננו מעגל.*
4. *אין בו מסלול אוילר כלל.*

***פתרון:***

*הטענה הראשונה נכונה. להלן דוגמא.*

**

*הטענה השניה אינה נכונה כי שום מסלול, המילטון או לא, לא יכול לעבור פעמיים או יותר על אותה קשת.*

*לפיכך, התשובה הנכונה היא א'.*

***תרגיל:***

*נתבונן ב-. בצד שבו 2 צמתים, נוסיף קשת בין 2 הצמתים. הגרף המתקבל:*

1. *הוא אוילרי ויש בו גם מסלול אוילר שאיננו מעגל.*
2. *הוא אוילרי וכל מסלול אוילר בו הוא מעגל.*
3. *הוא אינו אוילר אבל יש בו מסלול אוילר שאינו מעגל.*
4. *אין מסלול אוילר כלל.*

***פתרון:***

*הגרף אינו אוילרי אבל יש בו מסלול אוילר שאינו מעגל. ההסבר לכך הוא שכעת יש בו בדיוק 2 צמתים מדרגה 9 וכל השאר מדרגה 2. לכן, בדיוק 2 צמתים מדרגה אי זוגית.*

***הערה:*** *מראש ברור שתשובה א' אינה נכונה היות ובשום גרף לא ייתכן מצב שבו זמנית יהיו בו מעגל אוילר ומסלול אוילר שאינו מעגל.*

***תרגיל:***

*נתבונן ב-.*

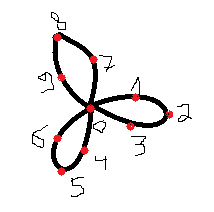
1. *הוא המילטוני ויש בו מסלול המילטון שאינו מעגל.*
2. *הוא המילטוני וכל מסלול המילטון בו הוא מעגל.*
3. *הוא המילטוני אבל יש בו מסלול המילטון שאינו מעגל.*
4. *אין בו מסלול המילטון כלל.*

***פתרון:***

*נשלול ישירות את ב' מכיוון שבכל גרף המילטוני יש גם מסלול המילטון שאינו מעגל. התשובה הנכונה היא ג' והסיבה לכך שאין מעגל המילטון היא שהצדדים אינם שווים בגודלם.*

***זיווגים***

*דוגמא למעגל (לא פשוט) באורך זוגי שאין בו זיווג מושלם:*

**

*יש כאן 10 צמתים. דרגת 9 מהם הוא 2 ודרגת הנוסף הוא 6. הגרף קשיר. לפיכך, הגרף הוא אוילרי, כלומר, יש בו מעגל אוילר. מעגל אוילר בגרף קשיר מכסה את כל הגרף ולכן הגרף עצמו הוא מעגל, לא פשוט. יש 12 קשתות ולכן זהו מעגל באורך זוגי.*

*טענה: אין במעגל זה זיווג מושלם.*

*הוכחה: נניח בשלילה שבמעגל זה יש זיווג מושלם. מכיוון שכך, ומכיוון שהשכנים היחידים של 1 הם 0 ו-2, וכך גם של 3, אז לפחות אחד מהם (1 או 3) חייב להיות מזווג ל-0.*

*מנגד, 7 ו-9 לא יכולים להיות מזווגים ל-0 כי הוא כבר תפוס ולכן שניהם חייבים להיות מזווגים ל-8. מכאן, אין כאן זיווג (סתירה להגדרה של זיווג). לכן, למרות שהמעגל הוא זוגי, אין בו זיווג מושלם.*

*לפיכך, יש לתקן את שאלה מס' 1 בעמוד 45 מ"מעגל" ל"מעגל פשוט".*

**שיעור 14 – 14.6.13**

***נניח ש-G גרף. זיווג בגרף G זו קבוצת קשתות בגרף שאינה מכילה לולאות וכל שתיים מהקשתות בקבוצה אינן בעלות צומת משותף.***

***זיווג מושלם:***

***זיווג שעובר דרך כל הצמתים בגרף (במילים אחרות, מכיל בדיוק קשתות).***

***מסקנה מיידית: אם nאי זוגי אז לא קיים ב-G זיווג מושלם.***

***מסקנה פחות מיידית: במעגל פשוט בעל מספר זוגי של צמתים יש זיווג מושלם.***

***מסקנה עוד פחות מיידית: מעגל שאינו פשוט בעל מספר זוגי של צמתים לא חייב להיות בעל זיווג מושלם.***

***מסקנה נוספת: אם G בעל מספר זוגי של צמתים ומכיל מעגל פשוט העובר על כל הצמתים הללו (המילטוני) אז ב-G יש זיווג מושלם.***

***תרגיל:***

*מצא זיווג מושלם ב-.*

***פתרון:***

*לכל צומת מהצורה נתאים את הצומת כאשר . אלה כמובן צמתים שכנים (עוברת ביניהם קשת) וכל צומת מותאם לצומת אחת בדיוק. מכאן, מדובר בזיווג מושלם. למשל, להלן זיווג מושלם ב- לפי התהליך הזה:*

*1000-0000*

*1001-0001*

*1010-0010*

*1011-0011*

*1100-0100*

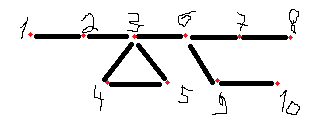
*1101-0101*

*1110-0110*

*1111-0111*

***זיווג מקסימום לגרף G זהו זיווג בעל מספר קשתות מקסימלי. כלומר, לא קיים זיווג בעל מספר קשתות רב יותר. כל זיווג מושלם הוא זיווג מקסימום אך לא כל זיווג מקסימום הוא זיווג מושלם.***

***זיווג מקסימלי בגרף G זהו זיווג שאינו מוכל ממש באף זיווג אחר. כמובן שכל זיווג מקסימום הוא זיווג מקסימלי אבל לא כל זיווג מקסימלי הוא זיווג מקסימום.***

**

*יש לנו כאן גרף פשוט בעל 10 צמתים וזיווג המכיל את הקשתות 2-3, 4-5, 7-8, 9-10, למשל. נסמן זיווג זה ב-m.*

***טענה:*** *m זיווג מקסימלי.*

*נעבור על כל הקשתות שאינן ב-m ונראה שתוספת של כל אחת מהן יוצרת קבוצה שאיננה זיווג. אם נוסיף את 1-2 לא יתקבל זיווג כי 2-3 שייך ל-m. אם נוסיף את 3-4 או את 3-5 לא יתקבל זיווג מאותה סיבה. וכך הלאה, לא ניתן להוסיף את 3-6, את 6-9 ואת 6-7. לפיכך, m היא זיווג מקסימלי.*

*זיווג m אינו מושלם כי לא כל הצמתים מזווגים על ידו (צומת 1 וצומת 6 אינם מזווגים).*

***מסלול שיפור***

***דוגמא לשני מסלולים m מתחלפים (שאחד מהם הוא מסלול שיפור והשני לא):***

***1-2-3-4 => 1-2 לא שייך ל-m, 2-3 שייך ל-m, 3-4 לא שייך ל-m.***

***1-2-3-6 => 1-2 לא שייך ל-m, 2-3 שייך ל-m, 3-6 לא שייך ל-m.***

***המסלול הראשון אינו מסלול שיפור היות שהצומת 4, שנמצאת באחד מקצוותיו, מזווגת על ידי m. המסלול השני, לעומתו, הוא מסלול שיפור מכיוון שאף אחד מקצוותיו אינו מזווג על ידי m.***

***משפט ברג' – Berge: זיווג m הוא זיווג מקסימום אם ורק אם אין לו מסלול שיפור.***

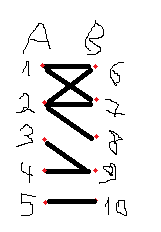
***תרגיל:***

*האם m הוא זיווג מקסימום?*

***פתרון:***

*הזיווג שלנו אינו מקסימום כי מצאנו לו מסלול שיפור – נקרא לו p. בניית זיווג חדש m' שיש בו יותר קשתות מאשר m: . ואז נקבל את הקשתות 1-2, 3-6, 4-5, 9-10, 7-8. בזיווג זה יש יותר קשתות מאשר ב-m. לכן, m אינו מקסימום. הזיווג החדש הוא זיווג מושלם ולכן זיווג מקסימום.*

***אם G דו צדדי, אז תנאי הכרחי להימצאותו של זיווג מושלם הוא ששני הצדדים יהיו באותו גודל. נסמן את הצדדים ב-A וב-B. בהנחה שמתקיים אז משפט Hall (משפט החתונה) אומר שיש זיווג מושלם אם ורק אם לכל יש מספר שכנים (ב-B) שגדול או שווה לגודלו של x.***

**

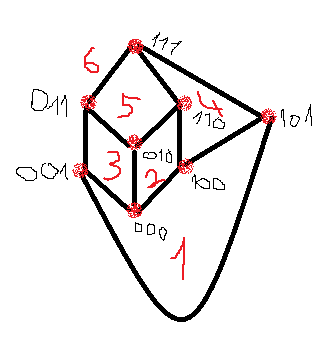
*בגרף לעיל אין זיווג מושלם. הוכחה: נסמן ואז . במקרה זה ולכן לפי משפט Hall אין זיווג מושלם בגרף.*

***הערה: בגרף דו צדדי מלא על קבוצות מסדר זהה של צמתים תמיד יהיה זיווג מושלם. כל פונקציה חח"ע מ-A ל-B תיצור זיווג מושלם.***

***גרף מישורי הוא גרף שניתן לציירו על המישור (על דף) כך שלא יהיו שתי קשתות מצטלבות ללא צומת ביניהן בנקודת המפגש. אם יש לגרף ציור מישורי אחד לחות אזי הוא מישורי.***

*להלן דוגמאות לגרפים מישוריים שאפשר להוכיח את מישוריותם ע"י ציורים פשוטים:*

1. *ולכן גם כל תת גרף של .*
2. *כל מעגל .*
3. *וגם .*
4. *בציורו הקלאסי (קובייה) אינו מישורי אך ניתן לציירו גם בצורה מישורית:*

**

*באדום ממוספרות הפיאות שהיו במקור של הקוביה. הפיאה ה-6 היא חיצונית ותחומה הוא היקף הגרף.*

***בכל ציור מישורי מספר הפיאות הוא קבוע. זה נובע ממשפט אוילר הקובע כי בכל ציור מישורי קשיר של גרף מישורי, כאשר m מציין את מספר הקשתות ואילו n מציין את מספר הצמתים.***

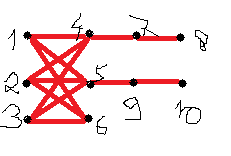
***גרף מישורי קשיר ופשוט בעל צמתים ו-m קשתות חייב לקיים . זהו תנאי הכרחי אך לא מספיק למישוריות.***

*ההוכחה מתבססת על משפט אוילר ועל פשטות הגרף. בעזרת התנאי לעיל ניתן להסיק כי אינו מישורי. הסיבה לכך היא שב- מתקיים וגם ואז . הגרף עונה על תנאי זה: ואז מתקיים ולמרות זאת אינו מישורי. על כן:*

***גרף מישורי דו צדדי קשיר ופשוט בעל צמתים ו-m קשתות חייב לקיים . ההוכחה, גם במקרה זה, מסתמכת על משפט אוילר.***

*ואז אינו עומד בתנאי זה ולכן אינו מישורי.*

***גם תנאי זה אינו מספיק למישוריות עבור גרף דו צדדי קשיר ופשוט שמקיים אותו.***

**

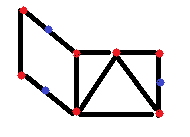
*הגרף הוא דו צדדי: . הגרף הוא פשוט וקשיר ועומד בתנאי המשפט. ומתקיים גם . ולמרות זאת אינו מישורי כי מכיל את שאינו מישורי.*

***העדנה של גרף:***

***העדנה של גרף היא תוספת צמתים לגרף (או: שבירה של צלעות בגרף). בצורה כזאת מוסיפים עוד צמתים ועוד צלעות.***

*כמובן שהעדנה של גרף מישורי, גם היא גרף מישורי.*

*הנקודות הכחולות בגרף שבעמוד הבא הן העדנה של גרף המקור.*

**

***טענה:***

***גרף הוא מישורי אם ורק אם כל העדנה שלו היא מישורית.***

***מכאן, קל להסיק כי גרף המכיל העדנה של או העדנה של אינו גרף מישורי. משפט קורטובסקי גורס כי גרף מישורי אם ורק אם אינו מכיל העדנה של או* .**

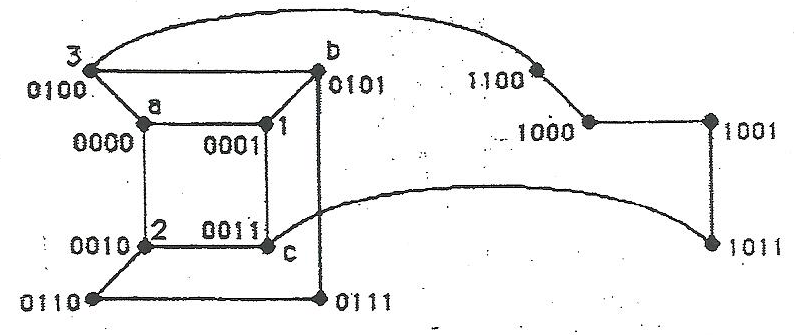
**תרגיל:**

הוכח כי אינה מישורית.

**פתרון:**

הגרף הוא דו צדדי, קשיר, בעל למעלה מ-3 צמתים, פשוט ולכן אם הוא מישורי הוא צריך לקיים . ו-. לכן, צריך להתקיים , וזו סתירה. לכן, אינו מישורי.

**להלן דוגמא גרפית:**



אם נבטל את כל העידונים בגרף לעיל ונשאר רק עם הצמתים 1,2,3 ו-a,b,c הרי שנקבל גרף מהסוג - והוא, כאמור, אינו מישורי.

**צביעה:**

**צביעה של גרף G היא פונקציה המתאימה לכל צומת צבע. צביעה חוקית (נאותה) היא צביעה שאינה מתאימה את אותו הצבע לשני צמתים שכנים.**

**מספר הצביעה של גרף G הוא המספר המינימאלי של צבעים בו ניתן להשתמש בכדי לצבוע את G בצביעה נאותה.**

**להלן מספר עובדות לגבי מספר הצביעה של G – שיסומן ב-*:***

1. ***אם G דו צדדי אז , אלא אם ב-G אין קשתות כלל ואז .***
2. ***אם n זוגי ו- אם n אי זוגי.***
3. ***כל צומת בצבע נפרד כי כל 2 צמתים הם שכנים.***

***עבור גרף מישורי מסתבר שמספר הצביעה לא יכול להיות גדול מדי ובמקרה זה . משפט זה נקרא משפט 4 הצבעים. בספר מוכיחים שמספר הצביעה של גרף מישורי הוא קטן או שווה ל-5. בגרף G כלשהו, אם נסמן את הדרגה המקסימלית ב- אז מספר הצביעה חייב להיות וברוב המקרים מתקיים אף .***

***תרגיל:***

*יהי G גרף פשוט על n צמתים ו- הגרף המשלים של G. הוכח שמספר הצביעה של G כפול מספר הצביעה של המשלים ל-G גדול או שווה ל-n. כלומר, .*

***פתרון:***

*תהי A קבוצה של צבעים שגודלה ותהי B קבוצה של צבעים שגודלה . ואז: . נסמן ב-V את קבוצת הצמתים של G (שהיא גם קבוצת הצמתים של ). . ננסה להגדיר פונקציה באופן שתתקבל פונקציה חח"ע.*

*לשם כך נצבע את G צביעה נאותה באמצעות הצבעים של קבוצה A (באמצעות פונקציה ). נצבע גם את צביעה נאותה באמצעות הצבעים של B (באמצעות הפונקציה ). נגדיר את על ידי ונוכיח כי היא חח"ע.*

*יהיו כך ש-. מקבלים במקרה זה כי ולכן וגם .*

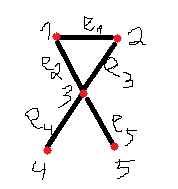
*מהשוויון מסיקים כי ו- אינם שכנים ב-. מהשוויון מסיקים כי ו- אינם שכנים ב-. מצב זה יכול לקרות רק כאשר (מכיוון ששני צמתים שונים חייבים להיות שכנים או ב-G או ב-). לכן, הפונקציה היא חח"ע.*

*מכיוון שכך, מתקיים . כלומר, .*

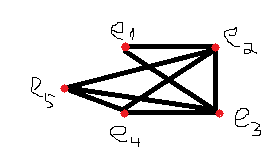
***גרף הקשתות:***

***נניח ש-G גרף פשוט . "גרף הקשתות" של G, המסומן ב-, הוא גרף שהצמתים שלו הם הקשתות של G ובין 2 צמתים של מחברת קשת אם ורק אם כקשתות ב-G הן עברו באותו צומת.***

*לדוגמא:*

**

*ואז הוא:*

**

*ל- צומת משותפ עם ו- אז מחברים את עם ועם . וכך הלאה...*

***תרגיל:***

*הוכח שאם הדרגה המקסימלית ב-G היא 3, אז .*

***פתרון:***

*תהי e קשת ב-G. הקשת עוברת ב-2 צמתים שונים, ו-. מכיוון שהדרגה של וגם הדרגה של קטנה או שווה ל-3 אז ל-e יש לכל היותר 4 קשתות שכנות. כלומר, ב-, בו e מהווה צומת מתקיים ש-. זה נכון לכל קשת ב-G ולכן לכל צומת ב-. לפיכך, .*

*מכאן, לפי משפט ברוקס והאפשרות ש- לפי אותו משפט היא אם ורק אם יש ב- רכיב קשירות שהוא . כלומר, אם , אז זה אומר שיש ב-G חמש קשתות שכולן שכנות זו לזו. מכיוון ש-G גרף פשוט והדרגה המקסימלית ב-G היא 3 אז לא ייתכן מצב בו יש דרגה 5 לאחד הצמתים.*

*לכן, אלא .*

***שאלה לבית, לתרגול נוסף:***

*נניח גרף פשוט שגם הוא וגם המשלים שלו מישוריים. הוכח כי מספר הצמתים בגרף הוא קטן או שווה ל-10.*

1. תנאי 3, באופן מדויק, אומר כי: לכל רלציה T המכילה את R ומקיימת את P, מתקיים . [↑](#footnote-ref-1)